

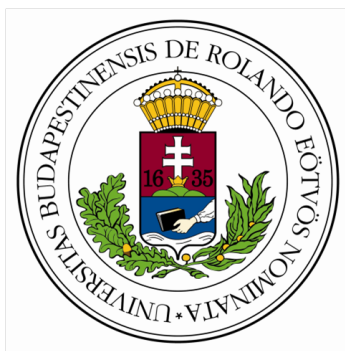
EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR
FIZIKA DOKTORI ISKOLA
RÉSZECSKEFIZIKA ÉS CSILLAGÁSZAT DOKTORI PROGRAM

TÉRELMÉLETI MÓDSZEREK AZ ASZTROFIZIKÁBAN

DOKTORI ÉRTEKEZÉS

Pósfay Péter

PhD hallgató



TÉMAVEZETŐK

dr. Barnaföldi Gergely Gábor, PhD

Wigner Fizikai Kutatóközpontt
tudományos főmunkatárs

dr. Jakovác Antal, DSc

ELTE, Természettudományi Kar
egyetemi tanár

Iskolavezető

dr. Gubicza Jenő, DSc

egyetemi tanár

Programvezető

dr. Katz Sándor, DSc

egyetemi tanár

2019

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
1.1. Magfizika és kompakt csillagok	7
1.1.1. A sűrű maganyag tulajdonságai	8
1.1.2. Tolman – Oppenheimer – Volkov-egyenletek	12
1.1.3. Az M - R diagram és általános tulajdonságai	15
1.2. A funkcionális renormálási csoport	19
1.2.1. Kvantumtérelméleti alapok	20
1.2.2. A Wetterich-egyenlet	22
1.2.3. Lokális potenciál közelítés (LPA)	25
1.2.4. A Wetterich-egyenlet alakja véges hőmérsékleten	26
1.2.5. Célkitűzések	27
2. Kvantum korrekciók számítása véges kémiai potenciálon	29
2.0.1. A modell és az FRG-egyenletek véges hőmérsékleten	30
2.0.2. Az FRG egyenletek analitikus megoldása	36
3. Kvantum korrekciók hatásának vizsgálata a Yukawa-modellben	44
3.1. Átlagtér megoldás	44
3.2. Bozonikus fluktuációk	49
3.3. A kvantum korrekciók hatása a fázisdiagramra	54
3.4. A kvantumkorrekciók hatása a neutroncsillagok tulajdonságaira . . .	58
3.4.1. A kvantumkorrekciók hatása az állapotegyenletre	58
3.4.2. A kvantumkorrekciók hatása a neutroncsillagok megfigyelhető mennyiségeire	61
3.5. A kvantumfluktuációk által okozott korrekciók detektálhatósága . . .	64
3.6. Konklúziók	69
4. A maganyag mikroszkópikus paramétereinek hatása a neutroncsil- lagok tulajdonságaira	71
4.1. A szimmetrikus maganyag paramétereinek vizsgálata	72
4.1.1. A kiterjesztett σ - ω modell	72
4.1.2. Neutroncsillagok tulajdonságai a kiterjesztett σ - ω modellben szimmetrikus maganyag esetén	85
4.2. Az aszimmetrikus maganyag paramétereinek vizsgálata	92

4.2.1.	Aszimmetrikus maganyag leírása a kiterjesztett σ - ω modellben	92
4.2.2.	A TOV-egyenletek megoldása és a neutroncsillagok megfigyelhető tulajdonságai a kiterjesztett σ - ω modellben aszimmetrikus maganyag esetén	98
4.2.3.	A neutroncsillagok tulajdonságai és az aszimmetrikus maganyag mikroszkópikus paraméterei	102
4.2.4.	A kéreg állapotegyenletének hatása az M - R diagramra	108
5.	Összefoglalás	111
A.	A Wetterich-egyenlet levezetése	115

Szójegyzék

ATHENA Advanced Telescope for High Energy Astrophysics.

CTP Closed Time Path.

eROSITA extended ROentgen Survey with an Imaging Telescope Array.

FRG Functional Renormalization Group.

ISS International Space Station.

LPA Local Potential Approximation.

NICER Neutron Star Interior Composition Explorer.

QCD Quantum Chromodynamics.

SRG Spectrum-Roentgen-Gamma.

TOV Tolman – Oppenheimer – Volkov.

1. fejezet

Bevezetés

*„Mert minden szó új korlátot teremt,
a gondolat testének szabva formát
s e korlátok közt kigyózik a rend
lépcséje, melyen addig másznak ormát
új és új látásnak, mígnem messze lent
köddé mosódik minden régi korlát,
s képekből összeáll a képtelen
korlátokból korlátlan végtelen.”*

– Babits Mihály, *Hadjárat a semmibe*

A rohamosan fejlődő asztrofizikai megfigyelési módszerek az Univerzumra vonatkozó elméleteink egyre precízebb ellenőrzését teszik lehetővé. Az egyre pontosabb adatok reprodukálása és magyarázata egyre nagyobb kihívást jelent a modellalkotással foglalkozó fizikusok számára. Doktori kutatásom során a neutroncsillagok modellezésével kapcsolatos kihívásokkal foglalkoztam, melyek a közelmúltban központi szerephez jutottak a kompakt csillagokkal kapcsolatos ismereteink bővülése miatt. Jelen munka az [1–6] publikációimban bemutatott eredményeimet foglalja össze.

A Világegyetem működését a tudomány a négy alapvető kölcsönhatásra vonatkozó elméleteinkkel magyarázza. Az Univerzum nagyskálás szerkezetét az általános relativitáselmélet írja le, azonban az elmélet alkalmazásához szükséges kezdeti és peremfeltételek az Univerzumot alkotó anyag tulajdonságaiból következnek [7, 8]. Az anyag tulajdonságainak leírásához magas hőmérsékleten és nyomáson az elektromágneses, az erős és a gyenge kölcsönhatást is figyelembe kell venni. Az asztrofizikai megfigyelések leírása óhatatlanul összekapcsolja az atomok és részecskék világát, a kicsi mérettartományok fizikáját, a nagy méretskálák jelenségeivel, a csillagok és galaxisok világával [8, 9]. A precíziós kozmológia megszületése, a kozmológiai standard modell felállítása és sikeres ellenőrzése fontos mérföldkő nem csak a fizika kutatásá-

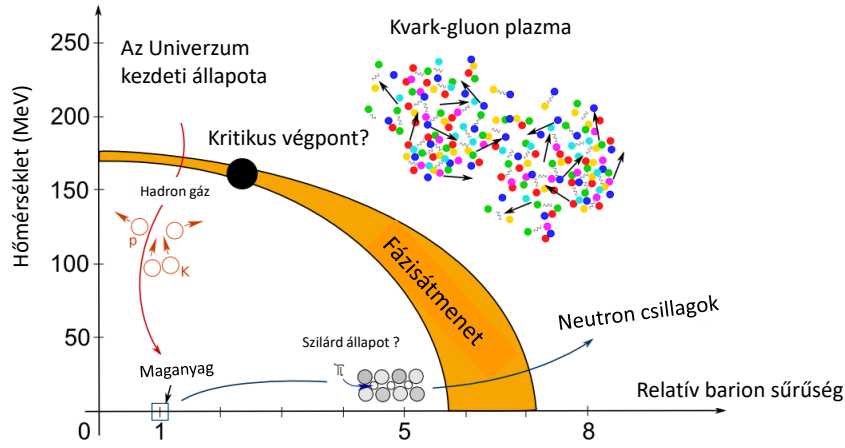
nak szempontjából, hanem a tudomány és racionalitás világmagyarázó mivoltának, az „égi” és a „földi” fizika egységességének igazolása szempontjából is [7, 10, 11].

A földi körülmények között elvégzett részecske és magfizikai kutatások szolgáltatták a csillagok és a Világegyetem modellezéséhez szükséges mikrofizikai ismereteket. Az anyagnak léteznek azonban olyan nagy sűrűségű, egzotikus állapotai melyek még részecskegyorsítóknak sem állíthatók elő, ezért közvetlenül nem figyelhetők meg, viszont előfordulnak nagy energiájú asztrofizikai jelenségekben.

A nagy tömegű csillagok életüket kataklizmikus szupernóva robbanással fejezik be, amely folyamat során olyan sok energia szabadul fel, hogy a robbanás fénye túlragyogja még a szupernóva galaxisának fényességét is. A robbanás során keletkeznek, illetve szabadulnak ki a csillagközi térbe a héliumnál nehezebb elemek, amik a szilárd égitestek anyagát és az élet alapját is képezik [8]. A felszabaduló energia egy része a csillag pusztulása után visszamaradó extrém sűrű objektum létrehozására fordítódik. A csillag magja a robbanás során a hatalmas nyomás és hőmérséklet hatására még inkább összesűrűsödik. Az így létrejött objektumokat (pulzárok, neutroncsillagok, magnetárok) nevezzük kompakt csillagoknak [12, 13]. A neutroncsillagok különleges állapotú, extrém nagy sűrűségű és hideg maganyagának vizsgálata mind asztrofizikai, mind részecskefizikai, magfizikai szempontból érdekessé vált az elmúlt években.

A kompakt csillagokra jellemző erős gravitációs tér teszi lehetővé, hogy az anyag ilyen sűrű állapotban is stabil maradjon. A gravitációs tér erőssége szükségessé teszi az általános relativitás elmélet használatát a vizsgálatok során, a sűrű maganyag leírása pedig magfizikai megfontolásokat igényel [12, 13]. Ez egyedi lehetőséget biztosít, mind a maganyag mind a relativitáselmélet tanulmányozására.

A magerőkre vonatkozó legmodernebb elméletünk a kvantum-színdinamika, aminek nemperturbatív numerikus megoldási módszere, a rácstérelmélet, nagyon sikeres a kísérleti eredmények reprodukálásában. A neutroncsillagokban jelen lévő körülmények között azonban a megoldási módszer kihívásokba ütközik, így jelenleg nincs alapelveken nyugvó számolás az extrém sűrű maganyagra nézve [14–16]. A fentiek miatt a neutroncsillagok anyagának vizsgálatában az effektív modellek továbbra is fontos szerephez jutnak [17, 18]. A modelleknek kettős feladata van: egyrészt biztosítaniuk kell a neutroncsillagok anyagának effektív leírását, mely asztrofizikai szimulációk bemenő paramétere, a megfigyelések kiértékelésének sarkalatos pontja. Másrészt a modelleknek hídként kell szolgálniuk az asztrofizikai megfigyelésekből szerzett adatok és a magfizikai mérések között. Mivel a maganyag az atommagokban megszokottnál nagyobb sűrűségeken – kis hőmérsékleten – csak a neutroncsillagokban fordul elő, csak innen nyerhetünk magfizikai információt a tulajdonságairól. A jelen helyzetet az 1.1. ábrán az erősen kölcsönható anyag fázisdiagramja foglalja össze. Részecskegyorsítókkal a maganyagot nagy sűrűségeken csak a hőmérséklet növelésével együtt tudjuk előállítani, azonban a fázisdiagram teljes ismeretéhez szükség van az alacsony hőmérsékletű és nagy sűrűségű tartományból származó információkra.

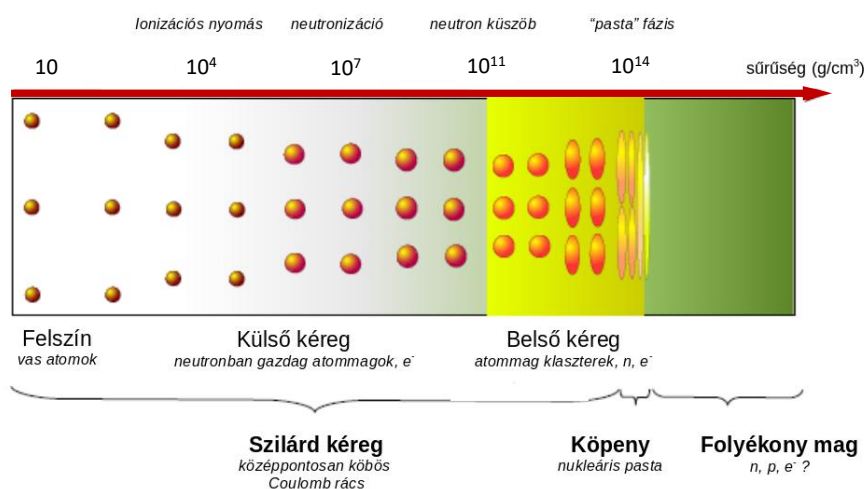


1.1. ábra. Általánosan elfogadott feltételezés az erős kölcsönhatás fázisdiagramjának alakjáról. © 2011 CERN – Antonin Maire

A rohamosan fejlődő asztrofizika mérések a kompakt csillagok tulajdonságait egyre pontosabban képesek meghatározni, így egyre szigorúbb megszorításokat jelentenek a modellekre nézve. Az elektromágneses spektrum tartományban röntgen és gamma műholdakkal végzett mérésekkel szeretnének egyre pontosabb adatokat szerezni a kompakt asztrofizikai objektumok paramétereiről. A 2017 óta a nemzetközi űrállomáson feladatot teljesítő NICER (Neutron Star Interior Composition Explorer) röntgen teleszkóp fő feladata a neutroncsillagok belső szerkezetének vizsgálata a pulzások frekvenciájának pontos mérésével [19, 20]. A jelenleg tervezés alatt álló ATHENA (Advanced Telescope for High Energy Astrophysics) röntgenteleszkóp feladatai között szintén szerepel a kompakt objektumok vizsgálata, megfigyelése [21]. A 2019 júliusában elindult SRG (Spectrum-Roentgen-Gamma) küldetés egyik legfontosabb berendezése az eROSITA (extended ROentgen Survey with an Imaging Telescope Array), mely az égboltot eddig példátlanul nagy szög és spektrális felbontással fogja vizsgálni a röntgen tartományban [22]. A röntgen és gamma tartomány mellett, a rádióteleszkópos mérések is egyre precízebbek és a kompakt csillagok paramétereit egyre nagyobb pontossággal tudják meghatározni alkalmazásukkal [23]. Az elektromágneses úton végzett megfigyelések mellett a közelmúltban megjelent a gravitációs hullámokkal történő vizsgálódás lehetséges is [24, 25]. A bespiráló neutroncsillag kettősök a legfontosabb gravitációs hullám források közé tartoznak. A kibocsátott hullám tulajdonságaiból szintén következtethetünk a sűrű maganyag tulajdonságaira, amint azt az első neutroncsillagokból származó gravitációs hullám, GW170817, vizsgálata során bebizonyosodott [25]. Az egyre pontosabb mérések kiértékeléséhez egyre kifinomultabb modellekre van szükség, ezért a fentebb említett tudományos projektek a modellalkotás szempontjából is kihívást jelentenek [26, 27].

1.1. Magfizika és kompakt csillagok

A csillagok stabilitása két egymással ellentétes hatás érzékeny egyensúlyán alapul. A bennük lévő nagy nyomású anyag tart ellen a gravitáció összehúzó hatásának. A csillag élete végén a fúzió során létrejött vas magot a degenerált elektronok nyomása tartja vissza az összeomlástól. A csillag külső rétegeiben zajló fúzió miatt a vas mag tömege tovább nő, ami miatt az elektronok relativisztikussá válnak, így az inverz β -bomlás egyre nagyobb valószínűséggel megy végbe, ami lecsökkenti a gravitációnak ellentartó vas mag nyomását. A mag maximális tömegét ami felett a degenerált elektronok nyomása eltűnik, és a mag nem tudja többé megtartani a felette lévő rétegek súlyát Chandrasekhar-határnak nevezzük. A csillag magja összeomlik és megkezdődnek a szupernóva robbanáshoz vezető folyamatok [12]. A neutroncsillagok a szupernóva robbanásból visszamaradó magból keletkeznek, és a fentiekből látható, hogy átlagsűrűségük az atommag sűrűségének nagyságrendjébe esik. A neutroncsillagban gravitációnak a neutrongazdag atommagokból álló maganyag nyomása tart ellent. A csillag hagymahéjszerű modelljében a nyomás kívülről befelé haladva nő, és ennek megfelelően a maganyag egyre egzotikusabb elrendeződésekben van jelen. Ezt szemlélteti az 1.2. ábra. A csillag felszínén a legstabilabb, legmélyebb kötési energiá-



1.2. ábra. A neutroncsillag egyensúlyi állapotainak sematikus ábrázolása a sűrűségektől mentén. Az ábra nagy részét a héj foglalja el, ahol a sűrűség 14 nagyságrendet változik. Forrás: [28]

val rendelkező vas atommagok helyezkednek el rács szerkezetben. A mag felé haladva a külső héjban egyre neutrontúsabb magokat találunk. A belső héjban a neutronok számára energetikailag kedvezővé válik kilépni a magból és a feltételezések szerint szuperfolyékony fázisba kondenzálódnak [13, 28]. Az atommagok a nyomás hatására különleges konfigurációkba rendeződnek, ezeket „tészta” fázisoknak nevezik [28]. A csillag magjában ahol a nyomás a legnagyobb, extrém sűrű homogén maganyag helyezkedik el. Ez az anyag adja a neutroncsillag tömegének tetemes részét, hiszen az asztrofizikailag releváns tömegű neutroncsillagok esetén a héj tömege kevesebb, mint a teljes csillag tömegének 3 %-a [28].

Doktori munkám során a homogén maganyag tulajdonságai és a neutroncsillag megfigyelhető paraméterei közötti összefüggéseket vizsgáltam, ezért az alábbiakban áttekintem a végtelen homogén maganyag releváns tulajdonságait. A képletek és az eredmények az egész dolgozatban a $\hbar = c = 1$ összefüggés által megadott természetes egységrendszerben értendők.

1.1.1. A sűrű maganyag tulajdonságai

A végtelen homogén maganyag – jelen ismereteink szerint – jól jellemzi neutroncsillagok belsejét, mert a mai univerzumban csak itt találunk az atommagok sűrűségével nagyságrendileg megegyező sűrűségű anyagot makroszkópikus méretekben [12]. Mivel az ilyen extrém sűrű és hideg maganyag a kompakt csillagokra jellemző hőmérsékleten még ma sem vizsgálható részecskegyorsítóknál, tulajdonságai közvetlenül nem mérhetőek. A hideg homogén sűrű maganyagra vonatkozó modellek konzisztenciája úgy biztosítható, hogy megköveteljük, hogy a modellek a véges magokra vonatkozó alapvető ismereteinket reprodukálják.

Kötött állapot

A homogén maganyaggal szemben támasztott egyik legalapvetőbb követelmény az, hogy leírja az atommagnak megfelelő kötött állapotot. Az egy nukleonra jutó kötési energiának minimuma van a sűrűség függvényében a szaturációs sűrűség értékénél,

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{B}{A} \right) \right|_{n=n_0} = 0 \quad (1.1)$$

ahol B a kötési energia, A a nukleonok száma, n a maganyag sűrűsége, n_0 pedig a sűrűség értéke a szaturációs pontban. A szaturációs sűrűség értékét különböző módszerek a $0,16 \pm 0,01 \text{ fm}^{-3}$ tartományban határozzák meg [13, 29–34]. Neutroncsillagokkal kapcsolatos számításaim során az alábbi, szakirodalomban elfogadott értéket használtam [12]:

$$n_0 = 0,153 \text{ fm}^{-3}. \quad (1.2)$$

A maganyag kötési energiájának értékét a különböző módszereket alkalmazó illesztések a $16,0 \pm 1,0 \text{ MeV}$ tartományon belül határozzák meg [13, 29–34]. Vizsgálataim során a neutroncsillagok szakirodalmában elterjedt értéket használtam [12]:

$$B = -16,3 \text{ MeV}. \quad (1.3)$$

A kötési energia kifejezhető a homogén maganyag ϵ energiasűrűségével és a nukleon-sűrűséggel:

$$B = \frac{\epsilon_0}{n_0} - m_N, \quad (1.4)$$

ahol m_N a nukleonok tömege, $\epsilon_0 = 141 \text{ MeV/fm}^3$ a szaturációs energiasűrűség. Felhasználva a jól ismert termodinamikai relációkat:

$$\begin{aligned} f &= \epsilon - Ts - \mu n, \\ f &= -p, \\ n &= -\frac{\partial f}{\partial \mu}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

ahol f , ϵ , s , T , p μ rendre a szabadenergia sűrűség, az energiasűrűség, az entrópiasűrűség, a hőmérséklet, a nyomás és a kémiai potenciál. A nyomás meghatározható a szaturációs pontban az energiasűrűséget a nukleonsűrűség függvényeként kezelve, és az (1.1) feltételt alkalmazva:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\epsilon(n)}{n} - m_N \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial \epsilon(n)}{\partial n} n - \epsilon(n) \right) \\ &= \frac{p}{n^2} \quad \Rightarrow \quad p = 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Felhasználtuk, hogy $\partial \epsilon(n)/\partial n = \mu$ és, hogy az (1.5) kifejezéseket $T = 0$ hőmérsékleten kell alkalmazni az atommagra. A szaturációs pontban tehát a homogén maganyag nyomása $p = 0$.

Kompresszibilitás

Az (1.4) egyenlettel megadott kötési energia a sűrűség függvényének is tekinthető:

$$B(n) = \frac{\epsilon(n)}{n} - m_N. \tag{1.7}$$

A kötési energia értéke és a szaturációs sűrűség az (1.7) „kötési energia függvényt” csak első rendben jellemzi a minimumhelyén. Részletesebb leíráshoz szükség van magasabb rendű tagokra is. Az első ezek közül a kompressziómodulus [35], melynek definíciója:

$$K = k_F^2 \frac{\partial^2(\epsilon/n)}{\partial k_F^2}, \tag{1.8}$$

ahol, k_F a nukleon Fermi-momentuma [12].

Felhasználva, hogy $n = \frac{2k_F^3}{3\pi^2}$ az (1.8) definíció egy másik gyakran használt alakját kapjuk:

$$\begin{aligned} K &= k_F^2 \frac{\partial^2(\epsilon/n)}{\partial k_F^2} = k_F^2 \frac{\partial^2(\epsilon/n)}{\partial n^2} \left(\frac{\partial n}{\partial k_F} \right)^2 \\ &= k_F^2 \frac{\partial^2(\epsilon/n)}{\partial k_F^2} = k_F^2 \frac{\partial^2(\epsilon/n)}{\partial n^2} \left(3 \frac{n}{k_F} \right)^2 \\ &= 9 n^2 \frac{\partial^2(\epsilon/n)}{\partial n^2} \end{aligned} \tag{1.9}$$

A különböző módszereken alapuló vizsgálatok egyetértenek abban, hogy a kompressziómodulus értéke a 200–300 MeV tartományban van [36–40]. Relativisztikus átlagtérelméletet alkalmazó magmodellek esetén értéke általában, 250–270 MeV, míg nem relativisztikus esetekben kisebb 200–240 MeV körüli érték [13, 36, 39]. Számításaim során az alábbi értéket használtam [12, 35, 36]:

$$K = 240 \text{ MeV}. \quad (1.10)$$

A kompressziómodulus kapcsolatban van a maganyag termodinamikai izoterm kompresszibilitásával. A szaturációs pontban igaz, hogy

$$K = \frac{9}{n_0 \chi}, \quad (1.11)$$

ahol χ az izoterm kompresszibilitás:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\chi} &= n \frac{\partial p}{\partial n} \\ \chi &= - \left(\frac{1}{V} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Az (1.11) kapcsolat könnyen belátható, ha az (1.6) és az (1.9) egyenletet felhasználjuk az (1.12) egyenlet átalakítására.

Asszimmetria energia

A kötési energia és a kompresszibilitás a szaturációs sűrűség közelében, azaz az (1.7) függvény minimumában jellemzik a maganyagot [12]. A kötési energia nem csak egyedül a sűrűségtől függ, befolyásolja a maganyagot alkotó protonok és neutronok aránya is. A kötési energia protonok és neutronok számának különbsége szerinti kifejtésében az első tag az asszimmetria energia. A neutroncsillagokban az inverz β -bomlás miatt kialakult jelentős neutrontöbblet szükségessé teszi az asszimmetria tag hatásainak vizsgálatát, melynek definíciója [12]:

$$a_{sim} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2(\epsilon/n)}{\partial t^2} \right) \Big|_{t=0}, \quad (1.13)$$

ahol $t = \frac{n_n - n_p}{n_B}$, azaz a neutronok n_n és protonok n_p sűrűségének különbsége az n_B teljes barionszámhoz viszonyítva. Az asszimmetria energia értékét különböző tanulmányok a $32,0 \pm 2,0$ MeV tartományban állapítják meg [13, 41, 42]. Számításaim során a neutroncsillagok szakirodalmában gyakran használt értékkel dolgoztam [12]:

$$a_{sim} = 32,5 \text{ MeV}. \quad (1.14)$$

Effektív nukleon tömeg

A nukleonok a maganyagon belül már nem tekinthetők szabad részecskének. A homogén maganyagban úgy mozognak, mint rájuk hatást gyakorló, aktív közegben, amivel erős kölcsönhatásban állnak. Mivel az erős kölcsönhatást elemi módon leíró QCD (quantum chromodynamics) egzakt megoldása nem ismert, a közeg hatását effektív módon vesszük figyelembe: a nukleonok tömege lecsökken a magon belül. Az effektív leírás miatt nem egyértelmű, hogy pontosan mit nevezünk nukleon tömegnek. Az egyik megközelítés az, hogy a nukleonokat, mint fermionokat leíró Dirac-egyenletben lévő tömegtag jelenti a tömeget, ezt hívjuk (Dirac) effektív-tömegnek [12]. Például az (1.15) Lagrange-függvénnyel leírt (formailag szabad) nukleon esetén az effektív tömeg m_N^* . Valójában a Dirac-effektív tömeg a *csupasz* tömeg (m_N) és az S sajátenergia járulékok összege: $m_N^* = m_N + S$, ekkor

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\partial - m_N^*) \Psi. \quad (1.15)$$

Az effektív tömeg véges magokban közvetlenül a spin-pálya kölcsönhatás potenciáljához kapcsolódik, ezért egy teljesen relativisztikus jelenség, klasszikus megfelelő nélkül [43]. Az irodalmi értéke a szaturációs sűrűségen a szabad nukleonok tömegének egységében mérve ($m_N = 938 \text{ MeV}$) [12, 43, 44]:

$$m_N^* \approx 0,55 - 0,6 m_N, \quad (1.16)$$

azaz a szabad nukleon tömeg körülbelül 60 %-a. A sűrűség és kémiai potenciál növekedésével az effektív tömeg értéke csökken a szaturációs pontban felvett értékéhez képest [12].

A nukleonok tömegének jellemzésére a maganyagon belül egy másik lehetséges mód a Landau-tömeg használata. Ez szemléletesen a Fermi-felület közeli, alacsony energiás gerjesztésekhez rendelt tömeg, m_L :

$$v_F = \left. \frac{\partial E_k}{\partial k} \right|_{k=k_F} \quad (1.17)$$

$$m_L = \frac{k_F}{v_F},$$

ahol $k = k_F$ a Fermi-felület és E_k a nukleonok diszperziós relációja. A Landau-tömeg az állapotsűrűséghez kapcsolódik relativisztikus és nem relativisztikus esetben egyaránt. Mért értéke a szabad nukleonok tömegében mérve [45–49]:

$$m_L^* = 0,74 m_N - 0,83 m_N, \quad (1.18)$$

Relativisztikus modellekben az effektív tömeg és a Landau-tömeg nem független egymástól, ezért nem illeszthetők egyszerre. A két mennyiséget az (1.19) formula kap-

Paraméter	Mért érték	Használt érték
kötési energia, B	$16,0 \pm 1,0 \text{ MeV}$	$16,3 \text{ MeV}$
szaturációs sűrűség, n_0	$0,16 \pm 0,01 \text{ fm}^{-3}$	$0,153 \text{ fm}^{-3}$
effektív tömeg, m^*	$0,55 m_N - 0,6 m_N$	$0,6 m_N$
Landau-tömeg, m_L	$0,74 m_N - 0,83 m_N$	$0,83 m_N$
kompressziómodulus, K	$200 - 270 \text{ MeV}$	240 MeV
aszimmetria energia, a_{szim}	$32,0 \pm 2,0 \text{ MeV}$	$32,5 \text{ MeV}$

1.1. táblázat. A homogén maganyagot leíró paraméterek mérési adatok alapján megengedhető értéktartománya, és a paraméterek dolgozatban felhasznált értéke [12, 13, 29–42, 45].

csolja össze:

$$m_L = \sqrt{k_F^2 + (m_N^*)^2}. \quad (1.19)$$

A homogén maganyag legfontosabb paramétereit és ezek szaturációs pontban mért értékeit az 1.1. táblázatban foglaltam össze.

1.1.2. Tolman – Oppenheimer – Volkov-egyenletek

Neutroncsillagokra vonatkozó alapvető becslések

A bevezetésben leírtak szerint a neutroncsillagot extrém sűrű maganyag alkotja. Egy ilyen objektum méretére és tömegére jó nagyságrendi becslés adható, felhasználva a feltételt miszerint egy ilyen objektum sugara R , nagyobb kell, hogy legyen mint a tömege alapján hozzá rendelt Schwarzschild-sugár R_S [50]:

$$R_S = 2MG, \quad (1.20)$$

ahol M a neutroncsillag tömege és G a gravitációs konstans. A maganyagot a cseppmodellel modellezve a neutroncsillag sugarát az (1.21) egyenlet adja meg [50]:

$$R = r_0 A^{1/3}, \quad (1.21)$$

ahol $r_0 = 0,5 \text{ fm}$ a távolság ahol a nukleonok közötti kölcsönhatás taszítóvá válik, A pedig a nukleonok száma a neutroncsillagban. A csillag tömegét ezek alapján a az (1.22) egyenlet adja meg:

$$M = m_N A, \quad (1.22)$$

ahol m_N a szabad nukleonok tömege. Az összeroppanás előtti határesetet véve mikor $R = R_S$ a neutroncsillag sugarára és tömegére a következő értékek adódnak [50]:

$$\begin{aligned} R &\approx 7 \text{ km} \\ M &\approx 2,3 M_\odot, \end{aligned} \quad (1.23)$$

ahol M_\odot a Nap tömege. Az (1.23) egyenletben lévő becslések nagyságrendi egyezést mutatnak az asztrofizikai megfigyelésekkel és a részletesebb számításokkal is, melyek szerint a neutroncsillag sugara 8–12 km, tömege pedig $1,1–2 M_\odot$ [12, 20, 50].

A csillag sugarának és tömegének ismeretében megbecsülhető a kompakt objektum graviációs kötési energiája E_{grav} . Ehhez fel kell tennünk, hogy a neutroncsillag egy homogén sűrűségű gömb, amit a newtoni graviáció tart össze [12, 50]. Valós mérési adatokat felhasználva az alábbi eredmény adódik:

$$E_{grav} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \approx 0,12 M, \quad (1.24)$$

ahol $M = 1,4 M_\odot$ a csillag tömege és $R = 10$ km a csillag sugara. Amint az az (1.24) egyenletből látszik a gravitációs kötési energia a csillag tömegének több mint 10 %-át teszi ki, ami azt jelenti, hogy várhatóan jelentősek lesznek a relativisztikus korrekciók. Erre utal az is, hogy a csillag Schwarzschild-sugarának és becsült sugarának hányadosa:

$$\frac{R_S}{R} \approx 0,41. \quad (1.25)$$

Ez a hányados klasszikus objektumokra, ahol a relativisztikus korrekciók elhanyagolhatóan kicsik, jóval kisebb, 0 közeli érték, a Föld esetében például $R_S/R \approx 10^{-9}$.

A neutroncsillagok relativisztikus leírása

A kompakt csillagok általános relativitás elméleten belüli tárgyalásához az Einstein-egyenleteket kell megoldani a csillagon belül és kívül [12, 51]:

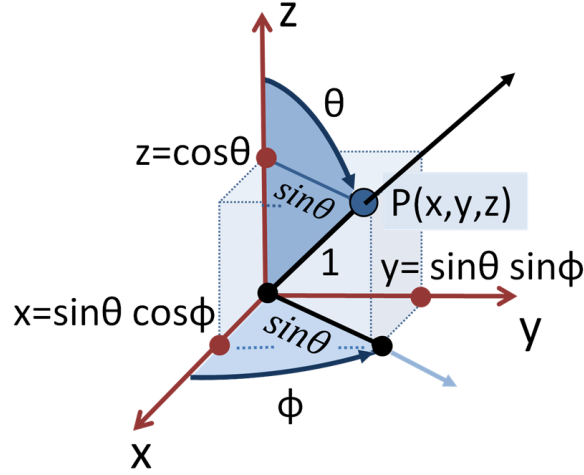
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.26)$$

ahol $R_{\mu\nu}$ a Ricci-tenzor, R a Ricci-skalár, $g_{\mu\nu}$ a metrikus tenzor, G a graviációs állandó, c a fénysebesség vákuumbeli értéke és $T_{\mu\nu}$ az impulzus-energia tenzor. Az (1.26) egyenlet megoldása statikus, gömbszimmetrikus téridőt feltéve a Tolman–Oppenheimer–Volkov-egyenletekhez (TOV-egyenletek) vezet, melyek jól jellemzik a kompakt csillagokon belüli körülményeket. A metrika általános alakja ilyen téridőben, gömbi polárkoordinátákban felírva [12, 50]:

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \\ &= e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2. \end{aligned} \quad (1.27)$$

ahol a polárkoordináták: r , θ és ϕ rendre az origótól mért távolság, a z -tengelytől mért szög és az x - y síkban az x -tengelytől mért szög (1.3. ábra). A $\nu(r)$ és $\lambda(r)$ függvények, amiket az Einstein-egyenletet megoldva határozhatunk meg az impulzus-energia tenzor ismeretében. A csillagon kívül a vákuumban az impulzus-energia tenzor azonosan nulla, azaz $T_{\mu\nu} = 0$, és az (1.26) Einstein-egyenletek a jól ismert Schwarzschild-

megoldást adják [12]. Az (1.26) egyenlet megoldásához a csillagon belül szükség van



1.3. ábra. Az (1.27) metrika felírásánál használt gömbi polárkoordináta-rendszer. Az ábra forrása [52]

a csillagot leíró anyag impulzus-energia tenzorára. A feltételeknek megfelelő tenzor alakja:

$$T^{\mu\nu} = -pg^{\mu\nu} + (p + \epsilon)u^\mu u^\nu \quad (1.28)$$

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1$$

ahol u az ideális folyadék négyessebessége $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, p a nyomása, ϵ pedig az energiasűrűsége. A nyomás és az energiasűrűség közötti kapcsolatot a csillag anyagának állapotegyenlete adja meg. Ez egy magfizikai megfontolásokból levezetett kapcsolat p és ϵ között, általánosan $p = p(\epsilon)$ vagy $\epsilon = \epsilon(p)$ alakban adják meg. Az állapotegyenlet levezetésénél nem kell figyelembe venni a metrika változását az általános relativitáselmélet miatt, mert a magfizikai méretskálán elhanyagolható korrekciókhoz vezet, ez az anyag „részleges lecsatolódása” a gravitációról [12]. Figyelembe véve az (1.28) egyenletet az (1.26) Einstein-egyenlet a Tolman – Oppenheimer – Volkov-egyenletekre vezet [12], melyek alakja a $c = 1$ egységrendszerben:

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)m(r)}{r^2} \left[1 - \frac{p(r)}{\epsilon(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{m(r)} \right] \left[1 - \frac{2Gm(r)}{r} \right]^{-1} \quad (1.29)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon(r).$$

Az (1.29) egyenletekben a szögletes zárójelekben lévő tényezők az általános relativitáselmélet miatt jelen lévő korrekciók, a klasszikus newtoni gravitáción alapuló leírásban nem jelennének meg. Látható, hogy a relativitáselmélet hatása nem merül ki a Schwarzschild-metrikából jól ismert $(1 - 2GM/R)$ típusú taggal, hanem a nyomás és az energia nem triviális módon befolyásolja a nyomásra vonatkozó differenciálegyenletet. A TOV-egyenletek megoldásának struktúrája igen szemléletes és leolvasható az (1.29) egyenletekről. A csillagot úgy képzelhetjük el, mint centrálisan elhelyezkedő egymásra épülő vékony gömbhéjak sorozatát. Egy ilyen infitezimálisan vékony, r

sugárnál elhelyezkedő héj tömege, a folyótömeg $m(r)$, benne a nyomás $p(r)$, az energiasűrűség pedig $\epsilon(r)$. A csillag teljes tömegét az infitezimális járulékok felintegrálása adja meg [12]:

$$M = 4\pi \int_0^R dr r^2 \epsilon(r), \quad (1.30)$$

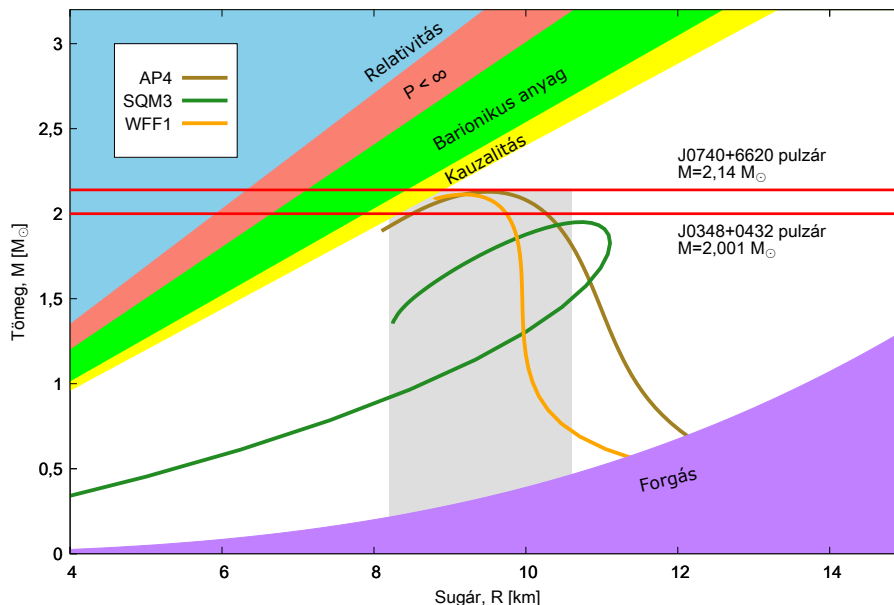
ahol R a kompakt csillag sugara. Az (1.29) TOV-egyenletek szimultán megoldása során az r változó szerint kell integrálni $r = 0$ -tól kezdve. Ehhez rögzíteni kell a kiindulási feltételeket a neutroncsillag középpontjának megfelelő $r = 0$ pontban: a p_c centrális nyomást, vagy ezzel egyenértékű módon az ϵ_c centrális energiasűrűséget. A kétféle kezdeti feltétel között az állapotegyenlet biztosítja a kapcsolatot: $p_c = p(\epsilon_c)$. Az r szerinti integrálás felső határát fizikai megfontolások alapján lehet megállapítani. A csillag felszínén ér véget az integrálást, ahol az r integrálási változó értéke megegyezik a csillag R sugarával. Könnyen belátható, hogy a csillag felszínén a nyomásra teljesülnie kell a $p(r=R) = 0$ feltételnek, ahhoz a külső vákuum és a maganyag között egyensúly jöjjön létre. A feltétel teljesülését a numerikus integrálás során folyamatosan ellenőrizni kell, hogy az integrálás felső határát, és így a csillag sugarát megállapíthassuk [12].

1.1.3. Az M - R diagram és általános tulajdonságai

A fentebb leírtaknak megfelelően az (1.29) TOV-egyenletek numerikus megoldásában a centrális energiasűrűséghez, ϵ_c -hez, mint kiindulási feltételhez két adat tartozik: a neutroncsillag sugara R_{ϵ_c} és tömege M_{ϵ_c} . A kiindulási feltételt, ϵ_c -t, változtatva a központi energiasűrűséggel címkézett megoldásokat kapunk. Ábrázolva az összetartozó M_{ϵ_c} - R_{ϵ_c} értékeket az M - R diagramot kapjuk. A diagram az adott állapotegyenlethez tartozó lehetséges neutroncsillag sugár és tömeg konfigurációkat szemlélteti. Ezek asztrofizikai módszerekkel megfigyelhető mennyiségek, így az M - R diagram ismeretében a homogén maganyagra vonatkozó modellek tesztelhetők.

Az 1.4. ábrán az irodalomból vett állapotegyenletek felhasználásával készült M - R görbék láthatóak, a különböző fizikai követelmények által kijelölt megengedett tartományokkal. Az SQM3 modell relativisztikus átlagtérelméleti megközelítés, ami tartalmazza a hadronok és a kvarkok közötti fázisátmenetet is. A modellben nem szerepel a csillag külső héjának leírása, ahol már neutronokban dús egzotikus magok alkotják a lényeges szabadsági fokokat, így a hozzá tartozó M - R görbe a csillag magjának tömegét és sugarát becsüli [53]. Az SQM3-al ellentétben a WFF1 állapotegyenlet nem relativisztikus leírason alapul, azonban a nukleonokat a kvantummechanikát figyelembe véve kezeli [54]. Speciálisan illesztett potenciálokkal veszi figyelembe a nukleon-nukleon kölcsönhatásokat, melyeket a kvantummechanikai soktest probléma megoldása során használnak fel. Az AP4 állapotegyenlet alapfeltevései megegyeznek a WFF1 modellével, de a kölcsönhatási potenciálokat más módon illesztették az adatokra [55]. Az SQM3 és WFF1 állapotegyenletek két egymástól alapvetően

eltérő megközelítést mutat be a maganyag modellezésére (az SQM3 relativisztikus, de nem kvantummechanikai, a WFF1 viszont nem-relativisztikus kvantummechanikán alapuló számolás). A WFF1 és AP4 görbe közötti különbség jól mutatja, hogy azonos alapfeltevések esetén is kaphatók különböző eredmények az adatokra történő illesztések különbözősége miatt.



1.4. ábra. M - R diagramok az AP4 [55], WFF1 [54] és SQM3 [53] állapotegyenletek felhasználásával. A különböző fizikai feltételek által kizárt tömeg és sugár kombinációkat színes tartományok jelölik. A neutroncsillagok maximális tömegére vonatkozóan két felső határt is feltüntettem: J0740+6620 pulzárt, ami jelenleg ismert legnagyobb tömegű neutroncsillag, és a J0348+0432 pulzárt, aminek tömegét a legpontosabban ismerjük a kimagaslóan nagy tömegű neutroncsillagok közül, így konzervatív becslés a maximális tömegre nézve [20, 56]. A szürke sáv jelzi a neutroncsillagok sugarának kis tömegű röntgen kettősökre vonatkozó mérések alapján meghatározott megengedett tartományát [57].

Az 1.4. ábrán jól tanulmányozhatók az M - R görbék tipikus tulajdonságai. A görbékre jellemző, hogy van lokális maximumuk, a legnagyobb tömegű csillag ami az adott állapotegyenlettel jellemzett maganyagból létrejöhet. Ez a lokális maximum az M - R görbét két részre bontja: az instabil tartományra, mely a maximumhelytől a kisebb sugarú objektumok felé helyezkedik el, és a stabil tartományra mely a maximális tömegű csillag sugaránál nagyobb sugarú, és kisebb tömegű (így kisebb központi energiasűrűségű) csillagokat tartalmaz. Csak a stabil tartomány ír le létező asztrofizikai objektumokat, mert az instabil részen lévő objektumok a tömeg vagy sugár kis perturbációjának hatására összeomlanak vagy átrendeződnek, és így átkerülnek a stabil tartományba [12]. Jelenleg a neutroncsillagok tömege az egyik legpontosabban meghatározható megfigyelhető tulajdonságuk ezért a maximális tömeg értékre vonatkozó megfigyelések jelentik az egyik legerősebb kritériumot a modellekkel szemben. Azok a modellek melyek kisebb maximális tömeget jósolnak mint a mért érték, azonnal kizárhatók. Az 1.4. ábrán feltüntettem, hogy a pulzárokra vonatkozó tömegmérések milyen korlátot jelentenek a neutroncsillagok maximális tömegére nézve. A legnagyobb tömegű neutroncsillag a megfigyelések jelenlegi állása szerint a J0740+6620 pulzár, melynek tömege $2,14^{+0,10}_{-0,09} M_{\odot}$ [56]. Az ehhez tartozó határvonal mellett a az 1.4. ábrán feltüntettem a J0348+0432 pulzárhoz tartozó adatokat is konzervatív

becslésként: jelenleg ennek a pulzárnak a tömegét ismerjük a legnagyobb pontossággal, ezért ez a legmegbízhatóbb becslés a neutroncsillagok maximális tömegére nézve, értéke $2,001 \pm 0,04 M_{\odot}$ [20].

Az M - R görbe stabil ágán lévő csillagok sugara széles tartományt ölel fel, tipikusan a 8–12 km értékek közé esik. A neutroncsillagok sugarának mérése kihívást jelent, jelenleg csak közvetett módon lehetséges. Az eredmények módszer és modellfüggőek, ezért viszonylag széles tartományt tudnak csak megadni a lehetséges neutroncsillag sugár értékekre. Modern becslések a neutroncsillagok sugarát 68 %-os konfidencia-intervalummal $R > 7,8$ km tartományba, 95 %-os konfidencia-intervalummal pedig $R > 10,7$ km tartományba helyezik [20, 26]. Kis tömegű röntgen kettősökre alapuló becslések a neutroncsillagok sugarát a $R = 9,4 \pm 1,2$ km tartományba teszik [57].

Az 1.4. ábrán látható M - R görbék között vannak olyanok melyek kis tömegű csillagokhoz tartozó része nagy sugarak felé tér el, és olyanok is amik pont ellentétesen a nagy sugarak felé tartanak. Az M - R görbék eltérő viselkedésének oka az, hogy a hozzájuk tartozó állapotegyenletek kis sűrűségű és nyomású tartományon máshogy viselkednek. Kis tömegű csillagok esetén a csillag felső rétegei kisebb nyomást gyakorolnak az alsóbb rétegekre ezért az állapotegyenlet kis nyomású része határozza meg a TOV-egyenlet megoldását. Ha ez olyan anyagot ír le amelynek kis nyomáson is nagy a sűrűsége, akkor az M - R diagram kis tömeg értékekre kis sugarak felé görbül, ha pedig az anyag sűrűsége kis nyomáson csökken, az M - R görbe a nagy sugarak felé görbül kis tömegű objektumok esetére [12].

Elméleti megfontolások alapján felállíthatóak limitáló esetek adott sugarú neutroncsillagok tömegére, amik így általános megszorítást jelentenek az M - R síkon, és kijelölik azt a tartományt amin belül az M - R görbének haladnia kell. Az 1.4. ábrán lévő színezett tartományok a különböző feltételek által kizárt régiókat jelölik. A feltételek jelentését az alábbiakban részletezem. A dolgozatban a neutroncsillagok sugarát mindenütt km-ben, tömegét pedig M_{\odot} naptömegben adom meg. A levezetésekben a $G = \hbar = c = 1$ egységrendszerrel használok, melyben a Nap tömege 1,475 km.

- **Relativitás** : Adott sugarú neutroncsillag tömege nem haladhatja meg azt az értéket ami egy ilyen sugarú Schwarzschild fekete lyuk tömege lenne, mert az a csillag összeomlásához vezet. Ez a feltétel az (1.31) összefüggést jelenti a csillag tömege és sugár között [12]:

$$R > 2M \quad \rightarrow \quad \frac{R}{2} > M. \quad (1.31)$$

Mivel természetes egységrendszerben a nap tömege 1,475 km, az (1.31) összefüggés egy $\frac{1}{2 \cdot 1,475} \approx 0,338$ meredekségű egyenessel határolt terület az M - R diagramon,

- $p < \infty$: A homogén sűrűségű csillag a valóságban elő nem forduló, limitáló esete a TOV-egyenlet megoldásainak, mert minden realiztikus esetben a

sűrűség csökken a csillag középpontjától kifelé haladva. A megoldásra igaz, hogy $\epsilon = \epsilon_c = \text{állandó}$, a nyomás pedig a középponttól kifelé haladva csökken. Ebben a speciális esetben a Tolman – Oppenheimer – Volkov-egyenletek analitikusan megoldhatóak, és a p_c centrális nyomás, az ϵ_c centrális energiasűrűség, valamint a csillag R sugara és M tömege között az (1.32) egyenlettel leírt kapcsolat van [12]:

$$\frac{2M}{R} = 1 - \left(\frac{p_c + \epsilon_c}{3p_c + \epsilon_c} \right)^2. \quad (1.32)$$

Minden maganyagra vonatkozó modellre igaz kell, hogy legyen, hogy a nyomás nem nőhet benne a végtelenségig. Ezért a $p_c \rightarrow \infty$ limeszt véve az (1.32) egyenletben az az (1.34) kapcsolatra vezet:

$$\frac{4R}{9} > M, \quad (1.33)$$

ez egy $\frac{4}{9 \cdot 1,475} \approx 0,3$ meredekségű egyenessel határolt terület az M - R diagramon.

- **Barionikus anyag** : Felhasználva, hogy $p < \epsilon$ igaz a barionikus anyagra kis sűrűségeken, és, hogy a hangsebesség az anyagban kisebb mint a fény sebessége, $dp/d\epsilon < 1$, látható, hogy $p < \epsilon$ univerzálisan igaz barionikus anyagra. Az (1.32) összefüggésben a $p = \epsilon$ helyettesítést, mint limitáló esetet véve, még szigorúbb feltételt kapunk az M - R diagramon megengedett tartományokra [12].

$$\frac{3R}{8} > M, \quad (1.34)$$

ami egy $\frac{3}{8 \cdot 1,475} \approx 0,254$ meredekségű egyenessel határolt terület az M - R diagramon.

- **Kauzalitás** : Numerikus vizsgálatok alapján megállapítható, hogy az (1.35) összefüggéssel leírható állapotegyenletek adják a legnagyobb tömegű csillagokat [58]:

$$\begin{aligned} p &= s(\epsilon - \epsilon_0) \quad , \quad \text{ha} \quad \epsilon > \epsilon_0 \\ p &= 0 \quad , \quad \text{ha} \quad \epsilon < \epsilon_0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Az (1.35) egyenletben szereplő s paraméter maximális értéke 1, ekkor az egyenlet által leírt anyagban a hangsebesség a maximális értékét, a vákuumbeli fénysebességet veszi fel. $s = 1$ -et helyettesítve az (1.35) egyenletbe, csak egy paraméter marad az ϵ_0 , melyet változtatva feltérképezhető a Tolman – Oppenheimer – Volkov-egyenlet megoldásának függése ϵ_0 -tól. Numerikus vizsgálatok kimutatták [58], hogy az (1.35) egyenlet által leírt anyagból álló kompakt csillagok M tömege és R sugara között az (1.36) egyenlet által leírt összefüggés van:

$$\frac{R}{2,82} > M. \quad (1.36)$$

Az összefüggést egy $\frac{1}{1,475 \cdot 2,82} \approx 0,24$ meredekségű egyenes által határolt területet ad meg az M - R diagramon.

- **Forgás** : A neutroncsillagok nagy frekvenciával forognak a tengelyük körül azonban a Tolman – Oppenheimer – Volkov-egyenletek csak statikus megoldást írnak le. A centrifugális erő megváltoztatja a hidrosztatikus egyensúlyt, így befolyásolja a csillag stabilitását, méretét és tömegét. Szélsőséges esetben a csillag túl gyorsan forog ahhoz, hogy a gravitáció össze tudja tartani, így instabillá válik. Az (1.37) összefüggés kapcsolatot teremt a csillag ν forgási frekvenciája, R sugara és a maximális M tömege között, ami mellett még stabil marad a kompakt objektum [59]:

$$\left(\frac{1}{0,0276}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{10^3 \text{ Hz}}{\nu}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{\frac{1}{3}} > \frac{R}{\text{km}}. \quad (1.37)$$

Az (1.37) formula egy R -ben harmadfokú összefüggést jelent a sugár és a tömeg között, ezért az M - R diagramon egy harmadfokú görbe által határolt területnek felel meg. A kapcsolat konkrét alakja függ a forgási frekvencia értékétől. Ahhoz, hogy az összefüggést a limitáló esetet írja le, a lehetséges legnagyobb forgási frekvencia értéket kell venni az (1.37) képletben, hiszen ez jelenti a legerősebb megkötést a csillag stabilitására nézve. A maximális forgási frekvenciát mért adatok alapján állapíthatjuk meg, ezért az M - R diagramon lévő terület változhat egy kisebb periódusidejű neutroncsillag felfedezésével. A jelenlegi adatok szerint a leggyorsabb pulzár frekvenciája [60]:

$$\nu = 716 \text{ Hz}, \quad (1.38)$$

ami alapján az (1.37) egyenlet az alábbi tartományt engedi meg a neutroncsillagok számára az M - R diagramon:

$$\left(\frac{R}{13,68}\right)^3 < M. \quad (1.39)$$

1.2. A funkcionális renormálási csoport

Doktori munkám során a funkcionális renormálási csoportot (FRG) használtam, hogy maganyag állapotegyenletéhez tartozó sugárzási korrekciókat meghatározzam. Az FRG egy általános módszer arra, hogy egy fizikai rendszer effektív hatását meghatározzuk a mikroszkópikus kölcsönhatásokból kiindulva [61]. Az alábbiakban a módszer alapjait ismertetem, az elmélet részletes bemutatása megtalálható a szakirodalomban [62, 63].

Az FRG a térelmélet funkcionális módszereit és a renormálási csoport transzformációt kombinálja [61, 64, 65]. Az eljárás lényege, a renormálási skála bevezetése, mely

a legtöbb alkalmazás esetén a energia, vagy impulzus jellegű mennyiség. A skálának azt a részét, amely a rendszer nagy energiákon és kis távolságokon való viselkedésének szempontjából releváns, UV (ultraibolya) skálának nevezzük. Ezzel ellentétben a skála azon része, ami a rendszer alacsony energiás viselkedésének szempontjából fontos, az IR (infravörös) skála. A megfigyelt fizikai mennyiségek mind az IR skálához tartoznak, a rendszer viselkedését leíró hatást azonban az UV skálán definiáljuk. A mikroszkópikus, nagy energiás hatásból kiindulva fel kell összegezni a kvantumfluktuációk hatását, hogy eljuthassunk az IR mennyiségekig. A renormálási csoport módszer a radiatív korrekciók felösszegzését lépésenként, momentum-héjanként végzi el, ami egy egzakt funkcionál-differenciálegyenletre, a Wetterich-egyenletre vezet.

Az alábbiakban összefoglalom a térelméleti alapokat, és a Wetterich-egyenlettel kapcsolatos tudnivalókat.

1.2.1. Kvantumtérelméleti alapok

Az n -pont függvények vagy korrelátorok a kvantumtérelmélet alapvető objektumai. Ismeretükben a rendszer viselkedése teljesen leírható, az összes fizikai információt tartalmazza. A gyakorlatban a korrelátorok általában nem ismertek teljesen, valamilyen, a leírt rendszernek megfelelő, séma alapján kell közelíteni őket. Perturbációszámítás esetén például lehetséges bizonyos magas rendű korrekciók elhanyagolása, míg nemperturbatív módszerek adott típusú korrekciókat teljesen felösszegeznek, másokat elhanyagolnak. A korrelátorokat euklideszi elfolytatású téridőben a következőképpen adhatjuk meg:

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = \langle 0 | T \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle = \frac{1}{N} \int [d\phi] \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-S[\phi]} \quad (1.40)$$

ahol N normalizációs konstans, és S a hatás. Feltettük, hogy létezik megfelelő mérték, mellyel az integrál értelmezhető. Egy kvantumtérelmélet teljes megadásához az összes n -pont függvényre szükség van. A rendszer generátorfunkcionáljának ismeretében az összes n -pont függvény kiszámítható, ezért a kvantumtérelmélet teljes definiálásához elég a generátorfunkcionál ismerete, melynek általános definícióját forrás jelenléte mellett az (1.41) egyenlet adja meg:

$$Z[J] = \int [d\phi] e^{-S[\phi] + \int dx \phi(x) J(x)}. \quad (1.41)$$

Az n -pont függvények kiszámításához J -szerint n -szer funkcionálisan deriválni kell az (1.41) generátorfunkcionált, majd a derivált értékét a $J = 0$ helyen kell venni:

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \left(\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z[J] \right) \Big|_{J=0} \quad (1.42)$$

A $Z[J]$ generátorból származtatott n -pont függvények a rendszer teljes, de redundáns leírását adják. Ennek oka a korrelátorok definíciója: az n -pont függvények között vannak olyanok is, melyek egyenértékűek egy m -pont függvény és egy $n - m$ -pont függvény felhasználásával. Az ilyen esetekben technikailag ugyan n db részecske vesz részt a folyamatban, valójában azonban ezekből m és $n - m$ külön-külön lép kölcsönhatásba egymással. Ezeket az n -pont függvényeket nem-összefüggőeknek nevezzük. A rendszer teljes leíráshoz elég az összefüggő n -pont függvények ismerete, hiszen azokból a nem-összefüggők könnyen felépíthetők. A redundancia elkerülhető a $W[J]$ Schwinger-funkcionál használatával, ami csak az összefüggő n -pont függvényeket generálja. A Schwinger-funkcionál a $Z[J]$ generátorfunkcionállal az (1.43) egyenlet által adott kapcsolatban van:

$$Z[J] = e^{W[J]}. \quad (1.43)$$

Az FRG formalizmusának szempontjából az egy-részecske irreducibilis korrelátorok fontos szerepet játszanak. Ezek olyan n -pont függvények, amelyek egy propagátor elhagyásával is összefüggők maradnak. Vizsgálatukhoz bevezetjük generátorfunkcionáljukat, az effektív hatást. Ehhez először definiáljuk a „klasszikus mezőt” az (1.44) egyenletnek megfelelő módon:

$$\varphi(x) = \langle \phi(x) \rangle_J = \frac{1}{Z[J]} \int [d\phi] \phi(x) e^{-S[\phi] + \int dx \phi(x) J(x)} = \frac{\delta W}{\delta J(x)}. \quad (1.44)$$

A fentiek alapján bevezethető $\varphi = \varphi[J]$, ebből $J = J[\varphi]$ kiszámolható. Az effektív hatás a Schwinger-funkcionál Legendre-transzformáltjaként áll elő az (1.45) egyenlet alapján:

$$\Gamma[\varphi] = \sup_J \left(\int d^d x J(x) \varphi(x) - W[J] \right). \quad (1.45)$$

A fentiek szerint minden ϕ -re egy $J = J_{\text{sup}}$ -ot választunk ki, amire $\int d^d x J(x) \phi(x) - W[J]$ felveszi a maximumát. Ezzel biztosított, hogy $\Gamma[\varphi]$ mindig konvex. Ha $J = J_{\text{sup}}$ akkor az (1.44) egyenlet felhasználásával megadhatjuk az effektív hatásra vonatkozó az (1.46) mozgásegyenletet:

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = - \int_y \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta \varphi(x)} + \int_y \frac{\delta J(y)}{\delta \varphi(x)} \varphi(y) + J(x) = J(x). \quad (1.46)$$

Ha az effektív hatás ismert akkor a fenti mozgásegyenlet az összes kvantummechanikai korrekciót figyelembe veszi. A hagyományos értelemben vett mezőre vonatkozó (1.47) mozgásegyenlet:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(x)} = 0. \quad (1.47)$$

Felhasználva a generátorfunkcionált definiáló (1.41) egyenletet és Schwinger-funkcionált megadó (1.43) egyenletet, valamint az effektív hatásra vonatkozó (1.45) definíciót

és az (1.46) mozgásegyenletet az alábbi kifejezést kapjuk, ami kapcsolatot teremt az effektív hatás és a rendszert leíró mikroszkópikus hatás között:

$$e^{W[J]} = e^{\int d^d x J(x)\varphi(x) - \Gamma[\varphi]} = \int [d\phi] e^{-S[\phi] + \int d^d x \phi(x)J(x)}, \quad (1.48)$$

$$e^{-\Gamma[\varphi]} = \int_{\Lambda} [d\phi] e^{-S[\phi] + \int d^d x \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} (\phi(x) - \varphi(x))}, \quad (1.49)$$

ahol $\Lambda \rightarrow \infty$ a levágási skála. A hagyományos értelemben vett mezőt felírhatjuk egy „klasszikus” és egy fluktuáló rész összegeként: $\phi \rightarrow \phi + \varphi$. A helyettesítést elvégezve az (1.50) egyenletet kapjuk az effektív hatásra, ami az egy-részecske irreducibilis összefüggő korrelátorok generátora:

$$e^{-\Gamma[\varphi]} = \int_{\Lambda} [d\phi] e^{-S[\phi + \varphi] + \int d^d x \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} \phi(x)}. \quad (1.50)$$

1.2.2. A Wetterich-egyenlet

Az FRG módszerben bevezetett skála összeköti az infravörös és ultraibolya tartományokat. A fizikai rendszer skálafüggő viselkedését a módszer a rendszert leíró effektív hatás skálafüggésén keresztül veszi figyelembe. A skála minden értékénél egy abban a pontban érvényes effektív hatás írja le a vizsgált rendszert. A fentiek miatt az FRG módszer alkalmazása során alapvető szerepet tölt be a Wetterich-egyenlet, amit megoldva megkapható az effektív hatás skálafüggése, és így a rendszer viselkedése minden skálán meghatározható. A Wetterich-egyenlet felírásához hasznos bevezetni a multi-index jelölést. Egy indexbe vonjuk össze a téridőváltozókhoz tartozó indexeket, mezők indexeit, impulzust és a spint. A folytonos indexeket valamilyen séma szerint diszkrétizáljuk és 1-től N -ig megszámozzuk a pontokat, így azonosítva őket. Az Einstein konvenciót bevezetve tovább egyszerűsödik a jelölés, a kétszer előforduló indexekre automatikusan összegezni kell. Ezzel a jelölésmóddal a generátorfunkcionálban előforduló forrástág n -komponensű mező esetén, az alábbi módon egyszerűsödik:

$$\sum_a \int dx \Psi_a(x) J_a(x) = \Psi_j J_j. \quad (1.51)$$

A mezők szerint vett funkcionál deriváltak közül a jobb és bal oldalról vett változatokat meg kell különböztetni a fermionok miatt. A továbbiakban a mezők szerint vett deriváltakat az alábbi módon jelöljük:

$$f_{a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_m}^{(n,m)} = \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \Psi_{a_1}} \cdots \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \Psi_{a_n}} f \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \Psi_{b_1}} \cdots \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \Psi_{b_m}}. \quad (1.52)$$

A fermionikus mezők antikommutálása miatt bevezetjük az α_{ab} mátrixot. Kommutáló mezőkre $\alpha_{ab} = 1$, antikommutáló mezőkre $\alpha_{ab} = -1$. Gyakran előforduló egyszerűsítés az $\alpha_{aa} = \alpha_a$.

Az FRG módszer alkalmazásához egy skála bevezetésével módosítani kell a pálya-integrált a skálafüggő effektív hatás bevezetéséhez. Ehhez az (1.41) egyenlettel adott generátort kiegészítjük egy $R_{k,ab}$ regulátor taggal, az (1.53) kifejezésnek megfelelően:

$$Z_k[J] = \int \left(\prod_a d\Psi_a \right) e^{-S[\Psi] - \frac{1}{2} R_{k,ab} \Psi_a \Psi_b + \Psi_a J_a}. \quad (1.53)$$

A regulátor skálafüggő tömegtagként viselkedik, ennek segítségével lehetséges a momentumhégységként történő integrálás. Minél nagyobb a regulátor értéke egy adott skálán annál nagyobb mértékben nyomja el ezen a skálán a fluktuációkat, így azok járuléka a pályaintegrálhoz kicsi lesz. A regulátornak teljesítenie kell az alábbi feltételeket:

- (I) $R_{k,ba} = \alpha_{ab} R_{k,ab}$,
- (II) $\lim_{p^2/k^2 \rightarrow 0} R_k(p) > 0$,
- (III) $\lim_{k^2/p^2 \rightarrow 0} R_k(p) = 0$,
- (IV) $\lim_{k \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty} R_k(p) = \infty$.

Az (I) feltétel R viselkedését rögzíti fermionikus és bozonikus mezők esetén. A (II) feltétel azt követeli meg, hogy adott skálán R viselkedjen infravörös regulátorként. A (III) feltétel a konzisztenciát biztosítja: bármely skálán nagy impulzusokra vissza kapjuk az eredeti hatást. A (IV) feltétel arról gondoskodik, hogy a $k \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty$ limeszben klasszikus hatást kapjunk, amiben nincsenek kvantummechanikai korrekciók. Mivel R tömegtagként viselkedik, a (IV) feltételnek megfelelő esetben a kvantummechanikai korrekcióknak megfelelő hurokintegrálok járuléka határesetben nulla a propagátorokban lévő nagy tömeg miatt.

A hatás skálafüggésének meghatározásához először vegyük a Z_k k -szerinti deriváltját az alábbi egyenletnek megfelelően.

$$\partial_k Z_k[J] = -\frac{1}{2} \partial_k R_{k,cd} \int \left(\prod_a d\Psi_a \right) \Psi_c \Psi_d e^{-S[\Psi] - \frac{1}{2} R_{k,ab} \Psi_a \Psi_b + \Psi_a J_a}, \quad (1.54)$$

ami felírható az alábbi alakban is:

$$\partial_k Z_k[J] = -\frac{1}{2} \partial_k R_{k,cd} \left(Z_k[J] \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial J_c} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial J_d} \right). \quad (1.55)$$

Ezt az összefüggést felhasználva levezethető az (1.45) egyenlettel adott effektív hatás skálafüggése. A levezetés részletei megtalálhatóak az A függelékben. Eredményül azt kapjuk, hogy:

$$\partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{STr} \left[(\partial_k R_k) \left(\Gamma_k^{(1,1)} + R_k \right)^{-1} \right]. \quad (1.56)$$

Az (1.56) egyenlet más néven Wetterich-egyenlet, vagy egzakt renormálási csoport egyenlet. A $S\text{Tr}$ kifejezés „super trace” ami minden tekintetben ugyanúgy viselkedik mint a hagyományos Trace (Tr), de a fermionok esetén negatív. Az egyenletet grafikusán szemlélteti az 1.5. ábra, ami az egyenlet egyhurok szerkezetét mutatja, és, hogy a regulátor skálafüggő tömegtagként befolyásolja az effektív hatás skála szerinti deriváltját. Az egyenlet egzakt, ha az egyhurok integrálban az egzakt propagátor szerepel, azonban ez általában nem ismert ezért valamilyen közelítésre van szükség a propagátor és a hurokintegrál kiszámításához. Az (1.56) összefüggés egy

$$\partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2} \partial_k R_k \quad \text{[Diagram: A circle with a square on its right side, representing a loop with a regulator insertion.]}$$

1.5. ábra. Az (1.56) Wetterich-egyenlet grafikus reprezentációja az egzakt propagátorral és regulátorral (fekete négyzet).

differenciálegyenlet a rendszer effektív hatására Γ -ra. Ha k a skála ami mentén az impulzushéjakat felintegráljuk akkor igaz az alábbi két összefüggés:

$$\begin{aligned} \Gamma_{k \rightarrow \Lambda} &\simeq S_{csupasz} \\ \Gamma_{k \rightarrow 0} &= \Gamma. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Λ az UV levágási skála, ahol $\Gamma_{k=\Lambda} = S_{csupasz}$ mikroszkopikus hatást értelmezzük. Ez mindig „klasszikus” hatás, a kvantummechanikai korrekciók teljességükben csak a pályaintegrál elvégzése során kerülnek bele a rendszert leíró effektív hatásba, amikor $k = 0$. A hatást a levágási skálán ($S_{csupasz}$ -t) úgy kell megválasztani, hogy az (1.56) egyenlet integrálása után $k = 0$ -ban a $\Gamma_{k=0}$ -ból származtatott fizikai mennyiségek megegyezzenek a mért értékekkel.

Az eredmény ugyan regulátorfüggetlen egzakt esetben, azonban különböző közelítések esetén az eltérések a regulátor konkrét alakjától függnék. Doktori munkám során az optimalizált Litim-regulátort használtam, melyről belátható, hogy a legkisebb eltéréseket okozza [66]. A regulátor alakja:

$$R_k(p) = \Theta(k - p) \cdot (p^2 - k^2), \tag{1.58}$$

ahol p és k rendre a regulált impulzus és a skála nagysága, azaz $k = |\mathbf{k}|$ és $p = |\mathbf{p}|$. Szükség van még a regulátor skála szerint vett deriváltjára, melyre az alábbi kifejezés adódik:

$$\partial_k R_k(p) = -2k \Theta(k - p). \tag{1.59}$$

1.2.3. Lokális potenciál közelítés (LPA)

Az (1.56) Wetterich-egyenlet egzakt, azonban általános megoldása nem ismert. A konkrét számolások elvégzéséhez valamilyen *ansatzra* van szükség ami rögzíti az effektív potenciál alakját. Gyakran alkalmazzák a lokális potenciál közelítést (Local Potential Approximation, LPA). A módszer lényege, hogy elhanyagoljuk a vertexek



1.6. ábra. A lokális potenciál közelítés (LPA) szemléltetése. Egymáshoz közeli téridőpontok járulékat azonosnak tekintjük, ami a két nem lokális vertex közötti propagátorok végpontjait egy-egy téridőpontba húzza össze.

impulzusfüggését. Nem lokális vertexek esetén ez annak felel meg, hogy az egymáshoz közeli téridőpontok járulékat a pályaintegrálhoz egy reprezentáns pont járulékával közelítjük. Ezt szemlélteti az 1.6. ábra, amely rögzíti az effektív potenciál Γ alakját:

$$\Gamma_k[\psi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \psi_i K_{k,ij} \psi_j + U_k(\psi) \right], \quad (1.60)$$

ahol $K_{k,ij}$ egy általános magfüggvény, ami tér és időváltozók szerint vett deriváltakat tartalmaz, például bozonikus mezők esetén az alábbi alakot ölti:

$$\Gamma_k[\psi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + U_k(\psi) \right]. \quad (1.61)$$

A lokális potenciál közelítés esetén a Wetterich-egyenlet az U_k potenciál skálafüggését határozza meg. Impulzustérben az egyenlet alakja:

$$\partial_k U_k = \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (\partial_k R_{ij}) G_{ij}(p), \quad (1.62)$$

ahol G_{ij} a propagátor, ami az A függelék (A.13) egyenlete alapján az alábbi módon írható:

$$G_{ij}(p) = \frac{1}{K_{k,ij}(p) + U_{i,j}^{(1,1)}(p) + R_{k,ij}(p)}, \quad (1.63)$$

ahol felhasználtuk, hogy:

$$\Gamma_{i,j}^{1,1} = K_{k,ij}(p) + U_{i,j}^{(1,1)}. \quad (1.64)$$

Az U_k potenciál konkrét alakja függ a numerikus megoldási módszertől is, amit a Wetterich-egyenlet integrálására használunk. Gyakori közelítés, hogy hatványsor alakjában vesszük fel a potenciált, és az együtthatók skálafüggését vizsgáljuk:

$$U_k = \sum_n g_{k,n} \phi^n, \quad (1.65)$$

ahol ϕ a mezőkből képzett invariáns, $g_{k,n}$ -k pedig a ϕ n -dik hatványának skálafüggő csatolási állandói. A fenti alakot behelyettesítve az (1.62) egyenletbe, majd mindkét oldalt sorba fejtve, az együtthatók egyeztetése után differenciálegyenleteket kapunk a futó csatolásokra. Ezeket megoldva, megkapjuk U_k futását, azaz a skálafüggését.

1.2.4. A Wetterich-egyenlet alakja véges hőmérsékleten

Doktori munkám során az FRG módszert alkalmaztam véges hőmérsékletű térelméletekben. Ehhez szükség van az (1.56) Wetterich- egyenlet véges hőmérsékleten érvényes alakjára. Az alábbiakban az általam felhasznált alapvető összefüggéseket tekintem át, a részletes magyarázatok megtalálhatók a szakirodalomban [67, 68].

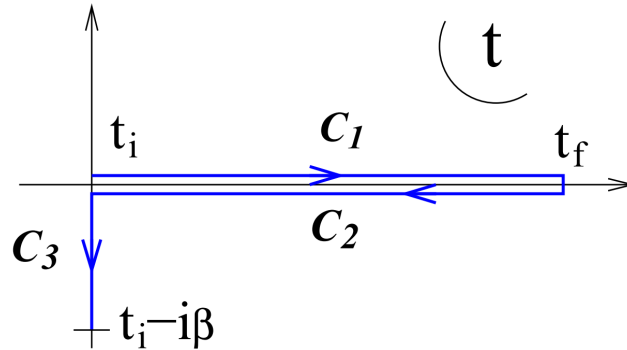
Az A függelékben kifejtett megfontolások alapján a Wetterich-egyenlet felírható az (A.19) alakban, a propagátort használva:

$$\partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Str} [(\partial_k R_k) G_k] . \quad (1.66)$$

Véges hőmérsékletű térelméletekben a pályaintegrál az idő dimenzió mentén nem csak valós, hanem képzetes értékeket is felvehet. Ennek megfelelően a hagyományos propagátor mellett megjelennek a véges hőmérsékletű, képzetes idő-tengelyhez tartozó propagátorok. A CTP (Closed Time Path) formalizmusban egy kontúrral parametrizáljuk a valós és képzetes időkontúrt is. A valós tengelyen előre, majd visszafelé haladó időkontúrt rendre 1, 2 indexszel a képzetes tengelyen haladó kontúrt pedig 3-as indexszel látjuk el (1.7. ábra). Ennek megfelelően bevezetjük az ezekhez a kontúrokhoz tartozó mező indexeket amiket Keldysh-indexeknek hívunk. A hatás alakja a képzetes kontúron:

$$iS = - \int_0^\beta d\tau L_E, \quad (1.67)$$

ahol L_E az Euklideszi hatás, $\beta = \frac{1}{T}$ pedig az inverz hőmérséklet.



1.7. ábra. Véges hőmérsékletű időkontúr [68].

Az (1.67) kifejezésben G helyére a véges hőmérsékletű propagátorok kerülnek. Véges hőmérsékletű esetben a regulátort csak 3 dimenzióban értelmezzük, az időtengely mentén nincs hatása, alakja $R_k(\mathbf{p})$, ahol \mathbf{p} a momentum térbeli része. A Wetterich-

egyenlet alakja a 3. kontúron haladó integrál esetén:

$$\partial_k \Gamma = \frac{1}{2} \partial_k R_{ab} G_{ab}^{33}. \quad (1.68)$$

LPA közelítés esetén tovább egyszerűsíthető az (1.68) egyenlet, felhasználva, hogy G_{ab}^{33} propagátor a Keldysh-propagátorral egyezik meg:

$$iG_{ij}^K(p) = \left(n_\alpha(p_0) + \frac{1}{2} \right) \rho_{ij}(p), \quad (1.69)$$

ahol

$$n_\alpha(\omega) = \frac{\alpha}{e^{\beta\omega} - \alpha}, \quad (1.70)$$

a Fermi–Dirac- ill. a Bose–Einstein-eloszlásoknak felel meg attól függően, hogy milyen mezőkről van szó, és $\rho(p)$ a megfelelő szabadsági fokok spektrálfüggvénye. LPA *ansatz* esetén az effektív potenciálra vonatkozó Wetterich-egyenlet az (1.69) egyenletnek megfelelő tagokból áll:

$$\partial_k U = -\alpha \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \partial_k R_{ij}(p) \left(\alpha n_\alpha(p_0) + \frac{1}{2} \right) \rho_{ij}(p) \quad (1.71)$$

1.2.5. Célkitűzések

A neutroncsillagok vizsgálata során kihívást jelent a különböző maganyag modellek megfigyelések útján történő szelekciója. Egymástól különböző nukleáris modellek gyakran vezetnek hasonló megfigyelhető paraméterekkel rendelkező neutroncsillagokhoz, ezt nevezzük „álarc problémának”. A doktori disszertációm célja az álarc probléma kérdésének vizsgálata, az effektív magmodellek szempontjából. Vizsgálataimat két fő gondolatmenet mentén végeztem. Először azt mutattam meg, hogy az álarc probléma fenn áll akkor is, ha csak egy adott modellt vizsgálunk, amiatt, hogy különböző közelítéseket használhatunk a téregyenletek megoldására. Másodikként fenomenológiai, oldalról azt vizsgáltam, hogy effektív maganyag modellek egy adott típusában mely mikroszkópikus paraméterek milyen mértékben befolyásolják a modellből származtatott neutroncsillagok mérhető paramétereit. A doktori dolgozat felépítése a fentebb bemutatott struktúrát követi.

A dolgozat első részében a funkcionális renormálási csoport (FRG) módszert alkalmaztam. A 2. fejezetben bemutatom az általam kidolgozott módszert a fermionikus FRG egyenletek megoldására véges kémiai potenciálon és nulla abszolút hőmérsékleten [2].

A 3. fejezetben ezt a módszert alkalmazom az általam vizsgált Yukawa-model esetére. Levezetem és megoldom az effektív potenciál futására vonatkozó egyenleteket. Bemutatom a renormálás hatását a modell fázisdiagramjára és az állapotegyenletére nézve, az eredmények átlagtér és egyhurok számolásokkal való összehasonlításával [1–3]. Megvizsgálom továbbá a radiatív korrekciók hatását a neutroncsillagok megfi-

gyelhető mennyiségeinek szempontjából, és a különböző közelítések közötti eltéréseket összevetem a lehetséges asztrofizikai megfigyelések pontosságával [5].

A 4. fejezetben az álarc probléma egy másik megjelenési formájával foglalkozom. Megvizsgálom, hogy a skalár önkölcsönhatási tagokkal kibővített $\sigma - \omega$ modellben mennyire érzékenyek a modellből származtatott neutroncsillagok tulajdonságai a maganyag illesztett, mikroszkópikus paramétereinek változásaira [6]. A nukleon effektív tömeg, a nukleáris kompresszibilitás és a szimmetria energia változásának hatását elemzem a neutroncsillagok maximális tömegének és sugarának értékére. A különböző paramétereknek köszönhető változások relatív nagyságát összehasonlítom és megvizsgálom, hogy mely paraméterek befolyásolják legnagyobb mértékben a neutroncsillagok jellemzőit, és megmutatom ezek következményeit a neutroncsillagokkal kapcsolatos megfigyelésekből levonható információkra nézve.

2. fejezet

Kvantum korrekciók számítása véges kémiai potenciálon

A funkcionális renormálási csoport (FRG) módszer véges hőmérsékleten és véges kémiai potenciálon történő alkalmazására aktívan kutatott terület [1, 69–73]. A kutatók egyik célja a módszer alkalmazhatóságának kiterjesztése az erős kölcsönhatásra, hiszen az így nyert információ közvetlenül használható lenne a nehézion-fizika [69] és a kompakt asztrofizikai objektumok vizsgálatának szempontjából is [72]. A QCD effektív modelljein alapuló vizsgálatok azt mutatják, hogy a bozonikus fluktuációknak jelentős szerepe van az erős kölcsönhatás fázisszerkezetére nézve [74], emiatt munkám során elsősorban a fermionikus térelméletekben lévő bozonikus fluktuációk modellezésre és kiszámítására koncentráltam.

Az egzakt renormálási csoport egyenlet (Wetterich-egyenlet) csak végtelen dimenziós operátor téren igaz, a gyakorlatban mindig szükség van valamilyen ansatzra, ami általában az 1.2.3. fejezetben kifejtett lokális potenciál közelítés. A potenciál evolúcióját leíró egyenletekben a Fermi–Dirac- és Bose–Einstein-eloszlást leíró tagok jelennek meg véges hőmérsékleten [1, 70, 72]. Alacsony hőmérsékleten a Fermi–Dirac-eloszlásfüggvény egyre inkább egységugrásfüggvényként viselkedik, és ezért ahogy a hőmérséklet csökken, deriváltjai egyre élesebben és egyre magasabbra felfutó keskeny csúccsal rendelkeznek a kémiai potenciálnak megfelelő energia értékénél. Az általánosan alkalmazott, numerikus differenciálegyenlet megoldó eljárások használata során a deriváltak ilyen kontrolálhatatlan növekedése, a pontatlanság növekedéséhez, határesetben a megoldás elvesztéséhez vezet [75].

Ebben a fejezetben az általam kidolgozott módszert mutatom be az FRG egyenletek megoldására nulla hőmérsékletű közelítésben és véges kémiai potenciálon [2]. A módszer előnye, hogy analitikus módon kezeli a potenciál fejlődését és az egységugrásfüggvényt, javítva ezzel a megoldás konvergenciáját. Az eljárást egy egyszerű modellen mutatom be, ami egy fermionikus és egy bozonikus szabadsági fokot tartalmaz, melyeket Yukawa-csatolás köt össze. A modell az FRG irodalomban széles körben használt ϕ^4 skalár térelmélet legminimálisabb fermionikus kiterjesztése, így az

első lépés az erős kölcsönhatás leírása felé.

Az általam vizsgált Yukawa-modell kiválasztásának alapja az, hogy a lehető legtisztább formában tanulmányozható legyen a bozonikus önkölcsönhatások által indukált fluktuációk hatása. Ehhez egy jelentősen egyszerűsített modellt választottam, azonban a modell matematikai komponensei, a kinetikus tagok, a mezők, és a kölcsönhatási tagok olyanok melyeket a részletesebb modellekben is sikerrel alkalmaznak. Az elmélet csak két nukleont tartalmaz, de a kinetikus tagban lévő tömeget módosítva könnyen általánosítható több nukleon esetére is: az átlagtérelméletekben a nukleonok közvetlenül nem hatnak egymással kölcsön, így a kinetikus tagok függetlenek egymástól, ezért újabb hadronok felvétele mindössze újabb hasonló alakú kinetikus tagok figyelembevételét jelenti. A nukleon és mezonok Yukawa-kölcsönhatáson keresztül hatnak kölcsön, a nukleonok típusától független erősséggel, ami szintén általános előforduló feltevés és ugyancsak könnyen bővíthetővé teszi az elméletet, mert nem kell minden újonnan bevezetett hadronhoz új csatolást is bevezetni. Az általam vizsgált skalármezon önkölcsönhatási tagok figyelembevétele szintén gyakori kiterjesztése a relativisztikusa átlagtér elméleteknek. A fentieknek köszönhetően a Yukawa-modellre kapott eredmények az effektív elméletek szempontjából általánosan is relevánsak.

2.0.1. A modell és az FRG-egyenletek véges hőmérsékleten

A Yukawa-modell a $k = \Lambda$ levágási skálán az alábbi skálafüggő effektív hatás definiálja:

$$\Gamma_\Lambda[\varphi, \psi] = \int d^4x \left[\bar{\psi}(i\partial - g_0\varphi)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{m_0^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda_0}{24}\varphi^4 \right], \quad (2.1)$$

ahol ψ a nukleonokat leíró többkomponensű fermion tér, φ a skalármezon, melynek tömege és negyedrendű önkölcsönhatásának erőssége a levágási skálán rendre m_0 , és λ_0 . A skalármezon és a nukleonok g_0 erősségű Yukawa-csatoláson keresztül hatnak kölcsön egymással.

A modell két fázissal rendelkezik, a szimmetrikus fázisban a fermionok tömege zérus, a spontán sértett fázisban a fermion tömege $g\langle\varphi\rangle$. Az FRG alkalmazásához szükség van egy *ansatzra* ami rögzíti a skálafüggő effektív hatás alakját és az operátorokat. Mivel a modell egyik fő célja, hogy bemutassam rajta, hogyan kezelhető a véges kémiai potenciál fermionikus esetben a legegyszerűbb, még fizikai jelentéssel bíró *ansatzot* választottam, amiben csak a bozonikus effektív potenciál függ a k skálától:

$$\Gamma_k[\varphi, \psi] = \int d^4x \left[\bar{\psi}(i\partial - g\varphi)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - U_k(\varphi) \right]. \quad (2.2)$$

A modellhez tartozó Wetterich-egyenlet a bevezető 1.2.2. és 1.2.3. fejezetei alapján a (2.3) egyenletnek megfelelő alakot ölti:

$$\partial_k U_k = \frac{1}{2} \hat{\partial}_k \text{STr} \ln \left(R_k + \Gamma_k^{(2)} \right), \quad (2.3)$$

ahol STr a szuper-trace, R_k a regulátor funkcionál, $\Gamma_k^{(2)}$ pedig az effektív hatás második deriváltja. A $\hat{\partial}_k$ derivált csak a regulátor k -függésére hat.

A modellre vonatkozó számításokat véges hőmérsékleten és véges kémiai potenciálon kell elvégezni, hogy a neutroncsillagok anyagára jellemző nagy sűrűsége és nyomáson a termodinamikai mennyiségek meghatározhatóak legyenek. A Wetterich-egyenlet ilyen körülmények között a bevezetőben bemutatott (1.71) alaktól kissé eltér, az n_α eloszlásfüggvényben megjelenik a μ véges kémiai potenciál [68]. Az (1.71) egyenletben lévő regulátor mátrix a (2.1) effektív hatással adott rendszer esetében diagonális a spektrálfüggvények mátrixához hasonlóan. A fermionikus és a bozonikus szabadsági fokok nem keverednek a regulálás szempontjából, ezért a vizsgált modell esetében az (1.71) egyenlet két tagú összegre esik szét, a fermionok és a bozonok járulékanak megfelelően:

$$\begin{aligned} \partial_k U = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\partial_k R_B(p) \left(n_B(p_0) + \frac{1}{2} \right) \rho_B(p) - \right. \\ \left. - 2 \text{Tr} \partial_k R_F(p) \rho_F(p) \left(\frac{1}{2} - n_F(p_0 + \mu) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

ahol n_B és n_F a Bose–Einstein- és a Fermi–Dirac-eloszlásfüggvények:

$$n_{B/F}(\omega) = \frac{1}{1 \mp e^{-\beta\omega}}, \quad (2.5)$$

és $\beta = 1/T$. R_B és R_F rendre a bozonikus és fermionikus regulátor, valamint ρ_B és ρ_F rendre a bozonokhoz és a fermionokhoz tartozó spektrálfüggvény. A Tr előtti 2-es azért jelenik meg, mert a fermionok esetében a $\bar{\psi}$ és ψ mezők járuléka megegyezik [68]. A bevezető 1.2.4. fejezetének megfelelően az (1.58) egyenlettel adott három dimenziós Litim-regulátor alkalmazható a bozonok és a Fermionok esetében is, aminek alakja a bozonok esetén megegyezik az (1.58) egyenletben adott Litim-regulátorral, tehát $R_B = R_k$. Fermionok esetén a regulátor Dirac-mátrixok kombinációja:

$$R_{F,ab}(\mathbf{p}) = \sum_i \gamma_{ab}^i \hat{p}_i \Theta(|\mathbf{k}| - |\mathbf{p}|) \cdot (|\mathbf{p}| - |\mathbf{k}|), \quad (2.6)$$

ahol γ_{ab}^i -k a gamma mátrixok és \hat{p}_i -k az egység hosszúra normált impulzus komponensei. A fermionikus regulátor skála szerint vett deriváltja az alábbi alakot ölti:

$$\partial_k R_{F,ab}(\mathbf{p}) = - \sum_i \gamma_{ab}^i \hat{p}_i \Theta(|\mathbf{k}| - |\mathbf{p}|). \quad (2.7)$$

A spektrálfüggvényekről feltettem, hogy alakjuk megegyezik a szabad bozonikus és

fermionikus szabadsági fokokhoz tartozó spektrálfüggvényekével [68]:

$$\begin{aligned}\rho_B(p) &= \frac{2\pi}{2\bar{\omega}_B(\mathbf{p})} \left[\delta(p_0 - \bar{\omega}_B(\mathbf{p})) - \delta(p_0 + \bar{\omega}_B(\mathbf{p})) \right], \\ \rho_F(p) &= \frac{2\pi}{2\bar{\omega}_F(\mathbf{p})} \left[\delta(p_0 - \bar{\omega}_F(\mathbf{p})) - \delta(p_0 + \bar{\omega}_F(\mathbf{p})) \right] D_{ab}(p),\end{aligned}\tag{2.8}$$

ahol,

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_B(\mathbf{p})^2 &= \mathbf{p}^2 + \partial_\varphi^2 U + R_k(\mathbf{p}) \\ \bar{\omega}_F(\mathbf{p})^2 &= \mathbf{p}^2 + g^2 \varphi^2 + R_k(\mathbf{p}),\end{aligned}\tag{2.9}$$

a regulált bozonikus és fermionikus energia és $D_{ab}(p)$ a Klein–Gordon osztó, aminek alakja regulált esetben:

$$D_{ab}(p) = \sum_i \gamma_{ab}^i p_i + R_{F,ab} + g\varphi.\tag{2.10}$$

A (2.4) egyenletben a fermionikus regulátor deriváltjára és a spektrálfüggvényre vonatkozó trace könnyen elvégezhető felhasználva a (2.7) a (2.10) és a (2.8) egyenleteket valamint a gamma mátrixok nyomára vonatkozó alapvető összefüggéseket. Az eredmény:

$$\text{Tr } \partial_k R_F(p) D(p) = -4|\mathbf{k}| \Theta(|\mathbf{k}| - |\mathbf{p}|).\tag{2.11}$$

A trace elvégzése után már nem szerepelnek mátrixok az egyenletben és az integrálás könnyen elvégezhető. Mivel a regulálás nem hat az impulzus nulladik komponensére a (2.4) egyenletben szereplő négyesintegrál nulladik komponensre vonatkozó részét érdemes külön elvégezni. Az integrálás hatására a Dirac-delták argumentumában szereplő $\bar{\omega}_B$ regulált bozonikus illetve az $\bar{\omega}_F$ regulált fermionikus energia bekerül a megfelelő $n_{B/F}$ eloszlásfüggvények argumentumába, és a Dirac-delták eltűnnek a kifejezésből. A p_0 szerinti integrálás eredménye:

$$\begin{aligned}\partial_k U &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \\ &\left[\left(-2|\mathbf{k}| \Theta(|\mathbf{k}| - |\mathbf{p}|) \right) \left(\frac{n_B(\bar{\omega}_B(\mathbf{p})) - n_B(-\bar{\omega}_B(\mathbf{p}))}{2\bar{\omega}_B(\mathbf{p})} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(8|\mathbf{k}| \Theta(|\mathbf{k}| - |\mathbf{p}|) \right) \left(\frac{n_F(-\bar{\omega}_F(\mathbf{p}) + \mu) - n_F(\bar{\omega}_F(\mathbf{p}) + \mu)}{2\bar{\omega}_F(\mathbf{p})} \right) \right].\end{aligned}\tag{2.12}$$

A fenti kifejezés nem függ explicit módon az impulzustól csak annak nagyságától, ezért a továbbiakban hasznos visszatérni a $p = |\mathbf{p}|$ és $k = |\mathbf{k}|$ jelölésekhez az integrál elvégzéséhez. Az integrálban szereplő lépcsőfüggvény miatt az R_k -ban szereplő $\Theta(k - p)$ lépcsőfüggvény mindig automatikusan teljesül, ezért a (2.9) egyenletekkel

adott regulált fermionikus és bozonikus energia az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned}\Theta(|\mathbf{k}| - |\mathbf{p}|) \bar{\omega}_B^2(\mathbf{p}) &= \Theta(|\mathbf{k}| - |\mathbf{p}|) (k^2 + \partial_\varphi^2 U) \\ \Theta(|\mathbf{k}| - |\mathbf{p}|) \bar{\omega}_F^2(\mathbf{p}) &= \Theta(|\mathbf{k}| - |\mathbf{p}|) (k^2 + g^2 \varphi^2),\end{aligned}\quad (2.13)$$

ami már nem függ \mathbf{p} -től csak k -tól. A fentiek miatt az impulzus térbeli komponenseire vonatkozó integrált egy konstans értékre kell elvégezni, hiszen az integrálandó kifejezés nem függ \mathbf{p} -től. Az integrálban lévő lépcsőfüggvény miatt az integrálás felső határa k . Az irányfüggetlenség miatt az impulzusra vett integrál egy k sugarú impulzustérbeli gömb térfogatának felel meg, amivel meg kell szorozni a szögletes zárójelben lévő kifejezést:

$$\int d^3p \Theta(k - p) \cdot \text{konst.} = \frac{4k^3\pi}{3} \cdot \text{konst.} \quad (2.14)$$

Az eloszlásfüggvényekre vonatkozó $1 + \alpha n_\alpha(-\omega) = -\alpha n_\alpha(\omega)$ összefüggést és az integrálásról leírtakat felhasználva a (2.13) egyenlet átalakítására, a Wetterich-egyenlet alakjára véges T hőmérsékleten és véges μ kémiai potenciálon az alábbi kifejezés adódik:

$$\partial_k U_k = \frac{k^4}{12\pi^2} \left[\frac{1 + 2n_B(\omega_B)}{\omega_B} + 4 \frac{-1 + n_F(\omega_F - \mu) + n_F(\omega_F + \mu)}{\omega_F} \right], \quad (2.15)$$

ahol

$$\omega_B^2 = k^2 + \partial_\varphi^2 U, \quad \text{és} \quad \omega_F^2 = k^2 + g^2 \varphi^2. \quad (2.16)$$

Az effektív potenciál alakja a levágási skálán, a $k = \Lambda$ értéknél egyben a (2.15) egyenlet kezdeti feltétele is:

$$U_\Lambda(\varphi) = \frac{m_0^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda_0}{24} \varphi^4. \quad (2.17)$$

A 2.1. ábra a (2.15) egyenlet grafikus reprezentációját mutatja. Látható az egyenlet szerkezete, ami fermionikus és bozonikus egyhurok integrálok összege, melyek tartalmazzák a regulátort, mint skálafüggő tömegtagot (lásd: az 1.2.2. fejezetet). LPA közelítésben igaz, hogy $\partial_k \Gamma_k \sim \partial_k U_k$, ezért szerepel az effektív hatás deriváltja a szimbolikus egyenletben. A fermionikus hurokintegrál előjele ellentétes a bozonikussal, ezért az effektív potenciál futását a két egymással versengő tag határozza meg. A kompakt

$$\partial_k \Gamma_k [\varphi, \psi] = \left[\text{fermionikus hurok} + \text{bozonikus hurok} \right]$$

2.1. ábra. A (2.15) Wetterich - egyenlet grafikus reprezentációja. Az effektív hatás skála szerint vett deriváltja egy fermionikus (folytonos vonal) és egy bozonikus (szaggatott vonal) egyhurok integrálból áll.

csillagok szempontjából a $T = 0$ hőmérsékletű és a $\mu > 0$ eset a legfontosabb, ezért a

módszert ilyen paraméterek mellett mutatom be. Emellett ez az eset tisztán mutatja, hogy nulla hőmérsékleten a kémiai potenciál véges értéke miatt milyen koncepcionális nehézségek lépnek fel a Fermi–Dirac eloszlás lépcsőfüggvényszerű viselkedése miatt és, hogy ezek a nehézségek, hogyan oldhatóak meg. Ilyen körülmények között a Bose–Einstein-eloszlásfüggvény nem ad járulékot a Fermi–Dirac-eloszlásfüggvény pedig egységugrásfüggvényre redukálódik:

$$n_F(\omega) \rightarrow \Theta(-\omega). \quad (2.18)$$

Ezeket figyelembe véve a (2.15) egyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\partial_k U_k = \frac{k^4}{12\pi^2} \left[\frac{1}{\omega_B} - 4 \frac{\Theta(\omega_F - \mu)}{\omega_F} \right]. \quad (2.19)$$

A (2.19) egyenlet szerint látszólag a fermionok csak a nagyenergiás, $\omega_F > \mu$ régióban aktívak, valójában azonban az történik, hogy alacsony energiájú tartományban a fermionikus vákuumfluktuációkat a termikus, statisztikus fluktuációk teljesen kompenzálják. A (2.19) egyenletben lévő lépcsőfüggvénynek köszönhetően két tartományon kell vizsgálnunk a megoldást, melyeken két különböző differenciálegyenlet írja le a potenciál k skála szerinti evolúcióját. A két tartomány az S_F Fermi-felület választja el egymástól, ami az alábbi egyenletből határozható meg:

$$\omega_F(k, \varphi) \Big|_{S_F} = \mu. \quad (2.20)$$

A felület leírható $k = k_F(\varphi)$ vagy $\varphi = \varphi_F(k)$ függvényként. A vizsgált modell esetében:

$$k_F = \sqrt{\mu^2 - g^2 \varphi^2}, \quad \text{és} \quad \varphi_F = \frac{1}{g} \sqrt{\mu^2 - k^2}. \quad (2.21)$$

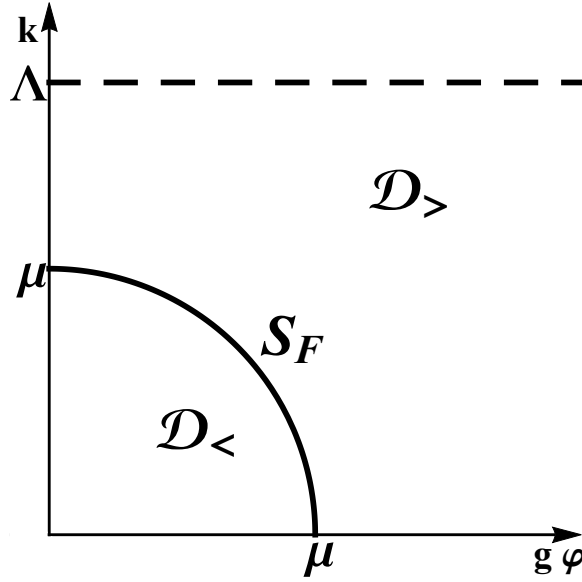
Az S_F felület a k és $g\varphi$ változókkal megadva egy μ sugarú kör, ezért $\mu = 0$ esetben eltűnik. A fentebb említettek szerint a Fermi-felület a koordináta-teret két részre osztja. A nagy energiához tartozó tartományt $\mathcal{D}_>$ -vel jelöljük, az alacsony energiához tartozót pedig $\mathcal{D}_<$ -vel:

$$\mathcal{D}_> = \{(k, \varphi) \mid k^2 + g^2 \varphi^2 > \mu^2\}, \quad \text{és} \quad \mathcal{D}_< = \{(k, \varphi) \mid k^2 + g^2 \varphi^2 < \mu^2\}. \quad (2.22)$$

A differenciálegyenlet szerkezete a 2.2. ábrán látható. A fenti tartományokban az alábbi differenciálegyenletek igazak:

$$\partial_k U_k = \frac{k^4}{12\pi^2} \left[\frac{1}{\omega_B} - \frac{4}{\omega_F} \right], \quad \text{ha } (k, \varphi) \in \mathcal{D}_>, \quad (2.23a)$$

$$\partial_k U_k = \frac{k^4}{12\pi^2} \frac{1}{\omega_B}, \quad \text{ha } (k, \varphi) \in \mathcal{D}_<. \quad (2.23b)$$



2.2. ábra. A (2.19) differenciálegyenlet szerkezete. Az S_F Fermi-felület egy körnek felel meg ebben a koordináta rendszerben.

A megoldás pedig folytonos $k = k_F$ esetén. Általános esetben hasonló struktúrájú egyenleteket kapunk, azonban ekkor a Fermi-felület konkrét alakja eltérő. Ettől eltekintve azonban mindig két tartományt találunk a rajtuk érvényes két különböző differenciálegyenlettel, melyekről megköveteljük, hogy a két megoldás folytonos legyen a határoló felületen. Ha a Fermi-felület egy egyértékű $k(\varphi)$ függvénnyel írható le, akkor minden $(k, \varphi) \in \mathcal{D}_>$ -re és minden dk -ra létezik olyan $(k + dk, \varphi)$ középpontú nyílt intervallum, $I_{k+dk, \varphi}$, amire $I_{k+dk, \varphi} \subset \mathcal{D}_>$. Emiatt minden φ szerinti derivált kiszámítható ezen a nyílt intervallumon, ami lehetővé teszi a potenciál meghatározását a (k, φ) pontban. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a megoldás a $\mathcal{D}_>$ tartományon a skála $k = \Lambda$ értékénél felvett kezdeti feltételből kiindulva meghatározható a Fermi-felületre való hivatkozás nélkül. Itt a $\mu = 0$ értékhez tartozó megoldás használható, ami könnyen meghatározható a hagyományos FRG technikák alkalmazásával[61, 64, 65, 76, 77]. A folytonossági feltétel miatt szükség van a megoldás értékre a Fermi-felületen, jelölje ezt $V_0(k)$. Úgy kaphatunk meg, hogy a Fermi-felületnek megfelelő részt „kivágjuk” a $\mu = 0$ kémiai potenciálhoz tartozó megoldásból a k - φ síkon:

$$V_0(k) = U_>(k, \varphi_F(k)), \quad (2.24)$$

ahol $U_>$ a (2.23a) egyenletnek a $k = \Lambda$ pontban definiált kezdeti feltételhez tartozó megoldása. Fontos, hogy $\varphi_F(k)$ általában csak azután határozható meg, hogy már megvan a $\mathcal{D}_>$ tartományhoz tartozó megoldás. Az általam vizsgált modell esetében $\varphi_F(k)$ konkrét alakja ismert, ezt behelyettesítve a (2.24) egyenletbe $V_0(k)$ -ra a Yukawa-modell esetén az alábbi kifejezés adódik:

$$V_0(k) = U_>(k, \frac{1}{g} \sqrt{\mu^2 - k^2}). \quad (2.25)$$

2.0.2. Az FRG egyenletek analitikus megoldása

A (2.23a) és a (2.23b) egyenletek megoldására nem használhatók közvetlenül a potenciál polinomiális kifejtésén alapuló módszerek (lásd az 1.2.3. fejezet), mert a $\mathcal{D}_<$ és $\mathcal{D}_>$ tartományokat elválasztó határvonal, azaz a Fermi-felület, nem illeszkedik a potenciál koordinátázásához: egy φ változójú polinom folytonosan megy át a Fermi-felületen, pedig annak két oldalán különböző differenciálegyenletek határozzák meg a potenciál evolúcióját, ami az egyenletek megoldása során nyilvánvalóan ellentmondáshoz vezet. A fentebbi érvelés a kis nyitott intervallumot illetően igaz a $\mathcal{D}_<$ tartományban is, azzal a változtatással, hogy az intervallumnak $(k-dk, \varphi)$ középpontúnak kell lennie. Az FRG egyenletek megoldhatók ezen a tartományon is anélkül, hogy figyelembe kellene venni a Fermi-felületet. A $k = 0$ pontban definiált kiindulási feltételt úgy kell megválasztani, hogy a megoldás Fermi-felületen egyezzen a $\mathcal{D}_>$ tartományon érvényes megoldással. Ez a megoldási módszer közvetlenül használható, azonban vizsgálataim során azt találtam, hogy a gyakorlatban numerikus stabilitási problémák merülnek fel: a $\mathcal{D}_<$ és $\mathcal{D}_>$ tartományokon érvényes megoldások illesztése a Fermi-felületen érzékeny a potenciál kifejtésére és ez egyenletek konkrét alakjára.

Koordináta transzformáció

A megoldás stabilitásának javítása érdekében bevezettem egy koordináta transzformációt ami igazodik a Fermi-felület alakjához és az általam vizsgálni kívánt modellhez. Ehhez a transzformációt úgy kell megválasztani, hogy a Fermi-felületet egy téglalappá képezze le és eközben megtartsa az egyenlet $\varphi \rightarrow -\varphi$ szimmetriáját. Mivel az egyenletek első rendűek k -változóban és másodrendűek a φ -változóban a transzformáció után kapott egyenleteknek is elsőrendűnek kell lennie az egyik változóban és másodrendűnek a másikban. A fenti feltételeknek megfelelő transzformációk alakja:

$$\begin{aligned} (k, \varphi) &\mapsto (x, y), \\ x &= X(k), \\ y &= Y(k, \varphi), \\ U(k, \varphi) &= \tilde{U}(x, y), \end{aligned} \tag{2.26}$$

ahol $Y(k, -\varphi) = -y$ is teljesül, mert a transzformációt úgy kell megválasztani, hogy a megoldandó egyenlet $\varphi \rightarrow -\varphi$ szimmetriája ne sérüljön. Az általánosság megsértése nélkül, rögzíthető, hogy $X(\mu) = 0$ és, hogy $X(0) = \mu$. Az inverz transzformáció alakja:

$$k = K(x), \quad \varphi = \Phi(x, y). \tag{2.27}$$

A Fermi-felület képe y -változóban konstans, kényelmi okokból választható $y = 1$ -nek. Ez azt jelenti, hogy :

$$Y(k, \varphi_F(k)) \equiv 1. \tag{2.28}$$

Az így levezetett transzformáció a Fermi-felületet egy téglalappá transzformálja, ahol $x \in [0, \mu]$ és $y \in [-1, 1]$. A peremfeltételek pedig:

$$\begin{aligned} V_0(\mu) &= \tilde{U}(x=0, y), \\ V_0(K(x)) &= \tilde{U}(x, y=\pm 1). \end{aligned} \quad (2.29)$$

A feltételeknek megfelelő transzformáció alakja:

$$\begin{aligned} x &= \varphi_F(k), \\ y &= \frac{\varphi}{x}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

amiből $\varphi = xy$ és $K(x) = \varphi_F^{-1}(x)$. A transzformáció után határfelület $y = 1$, ezért a peremfeltételek az új változókban:

$$\begin{aligned} V_0(\mu) &= \tilde{U}(x=0, y), \\ V_0(K(x)) &= \tilde{U}(x, y=\pm 1) = U_>(K(x), x). \end{aligned} \quad (2.31)$$

A differenciálegyenlet transzformált alakjának meghatározásához szükség van a deriváltak alakjára a transzformált koordinátákban:

$$\begin{aligned} \partial_k U &= \frac{dX}{dk} \partial_x \tilde{U} + \frac{\partial Y}{\partial k} \partial_y \tilde{U} = \frac{\varphi'(k)}{x} (x \partial_x \tilde{U} - y \partial_y \tilde{U}), \\ \partial_\varphi^2 U &= \frac{1}{x^2} \partial_y^2 \tilde{U}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

A deriváltakat felhasználva a (2.23b) egyenlet az alábbi alakba írható:

$$x \partial_x \tilde{U} = y \partial_y \tilde{U} + \frac{1}{12\pi^2} \frac{k^4 x^2}{\varphi'_F} \frac{1}{\sqrt{(kx)^2 + \partial_y^2 \tilde{U}}} \Big|_{k \rightarrow K(x)}. \quad (2.33)$$

A peremfeltételeket leválasztjuk a megoldásról:

$$\tilde{U}(x, y) = V_0(x) + \tilde{u}(x, y). \quad (2.34)$$

Ezt felhasználva:

$$x \partial_x \tilde{u} = -x V'_0 + y \partial_y \tilde{u} + \frac{1}{12\pi^2} \frac{k^4 x^2}{\varphi'_F} \frac{1}{\sqrt{(kx)^2 + \partial_y^2 \tilde{u}}}, \quad (2.35)$$

ahol $k \rightarrow K(x)$, és a peremfeltételek:

$$\tilde{u}(x=0, y) = \tilde{u}(x, y=\pm 1) = 0. \quad (2.36)$$

A (2.35) a transzformált FRG egyenlet általános alakja, általános Fermi-felület esetén. Az általam vizsgált modell esetén érdemes a (2.30) általános transzformáció alakján módosítani. A (2.21) egyenletekből látható, hogy φ mező g csatolással történő átskálázása után a Fermi-felület a $k - g\varphi$ síkon egy μ sugarú körnek felel meg. Ezt a változtatást figyelembe véve az új változók:

$$\begin{aligned}\varphi_F &= \frac{1}{g} \sqrt{\mu^2 - k^2} = x, \\ K(x) &= \sqrt{\mu^2 - g^2 x^2} = k, \\ \varphi'_F &= -\frac{k}{g^2 x}.\end{aligned}\tag{2.37}$$

A fentiek (2.35) általános FRG egyenletbe való behelyettesítése után, a transzformált FRG egyenlet Yukawa-modell esetén érvényes alakját kapjuk:

$$x\partial_x \tilde{u} = -xV'_0 + y\partial_y \tilde{u} - \frac{g^2(kx)^3}{12\pi^2} \frac{1}{\sqrt{(kx)^2 + \partial_y^2 \tilde{u}}},\tag{2.38}$$

ahol $k \rightarrow K(x)$, és a peremfeltételek $\tilde{u}(x=0, y) = \tilde{u}(x, y=\pm 1) = 0$.

Megoldás teljes függvényrendszerrel

A (2.35) általános FRG egyenlet analitikusan megoldható az $\tilde{u}(x, y)$ függvény alkalmas bázison való kifejtésével. Ez lehet polinomiális kifejtés, vagy rácson történő diszkretizáció is, a konkrét probléma dönti el melyik módszer alkalmazása a kedvezőbb. Az általam vizsgált modell esetében, figyelembe véve, hogy a Fermi-felület két részre bontja a megoldást, ortonormális függvényrendszerrel történő kifejtést találtam a legalkalmasabbnak. A $h_n(y)$ ortonormális függvényrendszer definiáló tulajdonságai:

$$\begin{aligned}\int_0^1 dy h_n(y) h_m(y) &= \delta_{nm}, \\ h_n(-y) &= h_n(y), \\ h_n(1) &= 0.\end{aligned}\tag{2.39}$$

A megoldás kifejtése az ortogonális rendszeren:

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x) h_n(y).\tag{2.40}$$

A vizsgált Yukawa-modell esetén érvényes (2.38) transzformált FRG egyenlet kezdőfeltételei közül $\tilde{u}(x, y=\pm 1)$ automatikusan teljesül a bázisválasztás miatt. A másik

$\tilde{u}(x=0, y) = 0$ peremfeltétel teljesítéséhez ki kell kötni, hogy

$$c_n(0) = 0. \quad (2.41)$$

A folytatáshoz a (2.38) differenciálegyenletet integro-differenciál egyenlet alakba kell írni. Általánosságban, ha adott egy differenciálegyenlet az alábbi alakban:

$$\partial_x \tilde{u} = \mathcal{F}(x, y; \tilde{u}, \partial_y \tilde{u}, \dots), \quad (2.42)$$

akkor az ekvivalens közönséges integro-differenciálegyenletek egy halmazával:

$$c'_n(x) = \int_0^1 dy \mathcal{F}(x, y; \tilde{u}, \partial_y \tilde{u}, \dots) h_n(y). \quad (2.43)$$

A fenti állítás általánosan igaz minden FRG egyenletre a megfelelő koordináta rendszerben, még véges hőmérsékleten és kémiai potenciálon is. Speciálisan a (2.38) egyenlet esetében:

$$xc'_n(x) = \int_0^1 dy h_n(y) \left[-xV'_0 + y\partial_y \tilde{u} - \frac{g^2(kx)^3}{12\pi^2} \frac{1}{\sqrt{(kx)^2 + \partial_y^2 \tilde{u}}} \right], \quad (2.44)$$

figyelembe véve a (2.41) kezdeti feltételt is, ahol

$$\begin{aligned} \partial_y \tilde{u} &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m(x) h'_m(y), \\ \partial_y^2 \tilde{u} &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m(x) h''_m(y). \end{aligned} \quad (2.45)$$

A fenti egyenletek a potenciál futásának teljes értékű leírását adják, a potenciál diszkretizációján és pontonkénti kifejtésén alapuló módszerek [76, 77] alternatíváját jelentik. A megoldáshoz fejtsük sorba a négyzetgyökös kifejezést a (2.44) egyenlet utolsó tagjában egy alkalmasan megválasztott M^2 tömegnégyzet körül:

$$xc'_n(x) = \int_0^1 dy h_n(y) \left[-xV'_0 + y\partial_y \tilde{u} - \frac{g^2(kx)^3}{12\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-1/2}{p} \frac{(\partial_y^2 \tilde{u} - M^2)^p}{\omega^{2p+1}} \right], \quad (2.46)$$

ahol

$$\begin{aligned} \omega^2 &= (kx)^2 + M^2, \\ \binom{a}{p} &= \frac{a(a-1)\dots(a-p+1)}{p!}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Az első néhány együttható: $1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, -\frac{5}{16}, \frac{35}{128}$. Az egyenlet ezen alakja sokkal kényelmesebb numerikus integrálás szempontjából, mert elkerüli a (2.44) egyenletben

fellépő instabilitást, ami a nevezőben lévő négyzetgyök kis értékénél lép fel.

A kifejtési együtthatók meghatározása

Az integrálás tovább egyszerűsíthető (és gyorsítható) kihasználva, hogy bizonyos kifejezésekre vonatkozó integrálok előre elvégezhetők, és a megoldás ezekből felépíthető. A (2.46) egyenlet utolsó tagjában a számlálót kibontva $(\partial_y^2 \tilde{u})^p$ típusú kifejezések fordulnak elő, amik a bázisfüggvények p -szeres szorzatait tartalmazzák. Az ezeket tartalmazó integrálok a megoldás előtt kiszámolhatóak, mert c_n együtthatók csak x függvényei és ezért nem befolyásolják az y szerinti integrálást. Ekkor a (2.46) differenciálegyenlet első két tagjában lévő integrál expliciten elvégezhető. A (2.46) egyenlet kifejtésében gyakran előforduló integrálokra vezessük be a következő jelöléseket:

$$A_n = \int_0^1 dy h_n(y), \quad (2.48)$$

$$B_{nm} = \int_0^1 dy h_m(y) y h'_m(y).$$

A (2.46) differenciálegyenlet utolsó tagjában \tilde{u} deriváltjának p -dik hatványa szerepel. Az ilyen tényezők kifejtésében előforduló integrálra érdemes bevezetni az alábbi jelölést:

$$R_n^{(p)}(x) = \int_0^1 dy h_n(y) (\partial_y^2 u(x, y))^p, \quad (2.49)$$

A fenti kifejezést mindkét oldalról megszorozva $h_m(y)$ -al, majd kihasználva az ortogonális függvényrendszer (2.39) definiáló tulajdonságait, indexcsere után az alábbi összefüggést kapjuk:

$$(\partial_y^2 u(x, y))^p = \sum_{n=1}^{\infty} R_n^{(p)}(x) h_n(y). \quad (2.50)$$

Levezethető egy rekurziós reláció az $R_n^{(p)}(x)$ együtthatók kiszámítására. Ehhez hasznos bevezetni a C_{nm} és $D_{nm\ell}$ segédmenyiségeket az alábbiak szerint:

$$C_{nm} = \int_0^1 dy h_n(y) h_m''(y), \quad (2.51)$$

$$D_{nm\ell} = \int_0^1 dy h_n(y) h_m(y) h_\ell(y).$$

A bevezetett jelölésekkel a (2.49) egyenlet $p = 1$ esetben az alábbi alakba írható:

$$R_n^{(1)} = \int_0^1 dy h_n \partial_y^2 u = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_0^1 dy h_n h_m'' = \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} c_m. \quad (2.52)$$

Felhasználva a (2.50) egyenletet azt kapjuk, hogy

$$(\partial_y^2 u)^{p+1} = (\partial_y^2 u)(\partial_y^2 u)^p = \sum_{m\ell} R_m^{(1)} R_\ell^{(p)} h_m h_\ell = \sum_{nm\ell} R_m^{(1)} R_\ell^{(p)} D_{nm\ell} h_n, \quad (2.53)$$

ami azt jelenti, hogy

$$R_n^{(p+1)} = \sum_{m\ell} D_{nm\ell} R_m^{(1)} R_\ell^{(p)}. \quad (2.54)$$

\mathcal{N} elemű bázis használata esetén $R_n^{(p)}$ együttható \mathcal{N}^p darab tag összege, amik közül mind arányos a $c_{n_1} \dots c_{n_p}$ szorzattal. Minél több bázisfüggvényt veszünk figyelembe a kifejtésnél, annál hosszabb szorzatokat kell kiszámítani, amihez természetesen egyre nagyobb számítási kapacitásra van szükség. Elég sok együttható esetén a számítások elvégzéséhez szükséges idő olyan nagy lesz, hogy a módszer alkalmazása lassabbá válhat mint az integrálok közvetlen numerikus elvégzése. Ekkor vissza kell térni a (2.46) explicit integrálegyenlethez, és az együtthatókra vonatkozó integrálokat numerikusan elvégezni. Kis számú együttható esetén a közvetlen numerikus integrálás lassabb, mint a fentebb levezetett együtthatók kiszámítása, azonban a közvetlen integrálás nem érzékeny a kifejtés rendjére, így hasznos lehet azokban az esetekben, amikor az együtthatók nem számíthatók ki előre a bázisfüggvények nagy száma miatt. Az, hogy melyik módszert érdemes választani a konkrét egyenletektől függ. Esetünkben attól, hogy a (2.46) egyenletben szereplő összegzés konvergenciájához hány darab bázisfüggvény segítségével kell kifejtetni a megoldást, és, hogy az adott számítógépen milyen gyorsan számíthatók ki az együtthatók. A fenti megfontolásokat felhasználva a (2.46) integro-differenciál egyenlet az alábbi alakba írható:

$$\begin{aligned} x c_n'(x) = & -A_n x V_0' + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} c_m(x) - \frac{g^2(kx)^3}{12\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-1/2}{p} \frac{1}{\omega^{2p+1}} \sum_{r=1}^p \binom{p}{r} (-M^2)^{p-r} R_n^{(r)}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

ahol Q_n és $R_n^{(1)}$ lineárisan függ c_n -től, és $R^{(p)}$ p együttható szorzatából áll.

Kifejtés harmonikus bázison

A (2.46) egyenlet a $\mathcal{D}_>$ tartományon írja le a potenciál evolúcióját (2.2. ábra). A transzformáció után érvényes (2.36) peremfeltételekhez a harmonikus függvények szerinti kifejtés illeszkedik természetesen, hiszen ezek az intervallum szélein $y = \pm 1$ értékeknél rögzítik a megoldás konstans értékét. A harmonikus bázis minden eleme

teljesíti ezt a feltételt, és mivel a függvényrendszer teljes, minden az intervallumon belül értelmezett függvény kifejezhető harmonikus bázisfüggvényekkel. A bázisfüggvények definíciója:

$$h_n(y) = \sqrt{2} \cos q_n y, \quad \text{és} \quad (2.56)$$

$$q_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad \text{ahol } n = 0, 1, 2, \dots$$

Az így definiált bázis kielégíti a (2.39) feltételeket. A fentebb leírtaknak megfelelően az A , B , C és D együtthatók előre kiszámíthatóak:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\sqrt{2}(-1)^n}{q_n}, \\ B_{nm} &= (-1)^{m+n} \frac{2q_n q_m}{q_m^2 - q_n^2}, \quad B_{nn} = -\frac{1}{2}, \\ C_{nm} &= -q_n^2 \delta_{nm}, \\ D_{nm\ell} &= \frac{4\sqrt{2}(-1)^{m+n+\ell+1} q_m q_n q_\ell}{(q_m + q_n - q_\ell)(q_m - q_n + q_\ell)(-q_m + q_n + q_\ell)(q_m + q_n + q_\ell)}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

A kifejtési együtthatók alakjából látható, hogy az ortogonális rendszerrel történő kifejtés miatt rendelkezik kedvező konvergencia tulajdonságokkal az FRG egyenletek megoldása szempontjából. Ennek szemléltetésére vegyük egy az $y < 1$ tartományon konstans, és $y = 1$ pontban nulla értékkel rendelkező kifejezés kifejtését. A harmonikus bázisban a kifejtése $\sum_n A_n h_n(y)$, amiben az együtthatók $\sim 1/n$ szerint csökkennek. Hasonlítsuk ezt össze ugyanennek a kifejezésnek a polinomiális kifejtésével. Ehhez megköveteljük, hogy a polinomok nulla értéket vegyenek fel az $y = 1$ helyen és az n/N pontokban ahol, $n = 0 \dots N - 1$:

$$U_{appr}(x) = 1 - \frac{K(x)}{K(1)}, \quad \text{ahol } K(x) = \prod_{m=0}^{N-1} \left(x - \frac{m}{N}\right), \quad (2.58)$$

hiszen $K(\ell/N) = 0$ minden $\ell = 1, \dots, N - 1$ -re. A legmagasabb hatvány együtthatója $-1/K(1)$, értéke:

$$\frac{1}{K(1)} = \frac{N^N}{N!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^N, \quad (2.59)$$

ahol felhasználtuk Stirling-formulát: $\ln N! = N \ln N - N + \mathcal{O}(\ln N)$. Látható, hogy a polinomiális kifejtésben a legnagyobb kitevőjű tag együtthatója, $\frac{1}{K(1)}$, exponenciálisan nő, ahogy a pontok N száma nő. Minél pontosabban, minél több pontban szeretnénk biztosítani, hogy a kifejtés reprodukálja az adott függvényt, annál nagyobb lesz a legmagasabb hatványú tag együtthatója a polinomban. Ez azt mutatja, hogy a polinomok szerinti kifejtésben az együtthatók számát növelve azok értéke nem csökken, hanem exponenciálisan nő, azaz egyre nagyobb járulékokat kell figyelembe venni, és pontosság növelésre tett kísérlet során az approximációs függvény végül túlnő minden határon. Ez éles kontrasztban áll a harmonikus kifejtés fentebb em-

lített esetével, ahol az együtthatók $\sim 1/n$ szerint csökkennek, ahogy a felhasznált báziselemek száma nő, azaz a kifejtés konvergál, és egy adott pontosság elérése után, már nincs szükség újabb együtthatók figyelembevételére. A fenti példa jól szemlélteti az effektív potenciál harmonikus kifejtésének előnyeit a polinomiális függvénybázison történő kifejtéssel szemben. A következő fejezetben ezt a módszert alkalmazom a Yukawa-modell FRG egyenletinek megoldására.

3. fejezet

Kvantum korrekciók hatásának vizsgálata a Yukawa-modellben

Ebben a fejezetben a (2.1) effektív hatással megadott Yukawa-modell FRG egyenleteinek megoldására alkalmazom a 2. fejezetben kidolgozott módszert. A számításokat véges kémiai potenciál mellett, nulla abszolút hőmérsékletet feltételezve végzem el, ami a neutroncsillagokban uralkodó feltételek esetén jó közelítés [12, 50].

A kvantumfluktuáció hatásának vizsgálatához az eredményeket összehasonlítom az átlagtér és egyhurok közelítésben elvégzett számításokkal. A különböző közelítések közötti különbségeket bemutatom a modell effektív hatásán, fázisdiagramján és állapotegyenletén. Az állapotegyenlet fentebb említett közelítéseit felhasználva megoldom a Tolman – Oppenheimer – Volkov-egyenleteket, és bemutatom, hogy a Yukawa-modell különböző közelítései milyen eltéréseket okoznak a modellből kiszámított neutroncsillagok paramétereiben: a csillagok maximális tömegében, sugarában, és az M - R görbe menetében. A fejezet végén összefoglalom eredményeimet és ezek jelentőségét az álarc probléma szempontjából.

3.1. Átlagtér megoldás

A kvantumkorrekciókat tartalmazó eredményekkel való összehasonlításhoz szükség van a radiatív korrekcióktól mentes, átlagtér eredményekre, ezért először ezeket a számításokat végeztem el a 2. fejezetben bevezetett Yukawa-modell-esetére. A bozonikus fluktuációk elhanyagolása után a (2.23a) és a (2.23b) egyenletek alakja:

$$\partial_k U_k = -\frac{k^4}{3\pi^2} \frac{1}{\omega_F} \Theta(k - k_F), \quad (3.1)$$

a $k = \Lambda$ értéken meghatározott kezdeti feltételekkel. Az explicit egyenlet egyszerű integrálással megoldható, aminek eredménye:

$$U(k, \varphi) = U(\Lambda, \varphi) + \frac{\mathcal{N}_F}{8\pi^2} \left[q\omega_F(q) \left(\frac{2}{3}q^2 - g^2\varphi^2 \right) + g^4\varphi^4 \ln(q + \omega_F(q)) \right]_{q=\max(k, k_F)}^{q=\Lambda}. \quad (3.2)$$

Érdemes a megoldásban lévő kifejezéseket az alábbi módon csoportosítani. A (3.2) megoldás szögletes zárójelben lévő kifejezését két határ között kell kiértékelni. A felső $q = \Lambda$ határon vett értékét vonjuk össze az $U(k, \varphi)$ felső határon vett értékével $U(\Lambda, \varphi)$ -val. Az így képzett összeget, ami a kezdeti feltételeket és a radiatív korrekciókat is tartalmaz, nevezzük el renormált potenciálnak:

$$U_{ren}(\varphi) = U(\Lambda, \varphi) + \frac{\mathcal{N}_F}{8\pi^2} \left[q\omega_F(q) \left(\frac{2}{3}q^2 - g^2\varphi^2 \right) + g^4\varphi^4 \ln(q + \omega_F(q)) \right]_{q=\Lambda}. \quad (3.3)$$

Ahhoz, hogy az effektív potenciált a standard alakra hozzassuk, szükség van $U_{ren}(\varphi)$ sorfejtésére a Λ levágási skálán. Ennek kiszámításához érdemes bevezetni $U(k, \varphi)$ kifejezésébe az M^* tetszőlegesen megválasztható tömeg dimenziójú mennyiséget, egy 0 összértékű tag hozzáadásával: $g^4\varphi^4 \ln M^* - g^4\varphi^4 \ln M^*$. Ennek a kifejezésnek az egyik tagját $U_{ren}(\varphi)$ -be a másikat $U(k, \varphi)$ fennmaradó részébe kell beépíteni. Az így módosított $U_{ren}(\varphi)$ szögletes zárójelben lévő része sorba fejthető Λ szerint végtelen körül, ha feltesszük, hogy Λ nagyobb mint az egyenletben előforduló bármely tömeg-skála. Átlagtér közelítésben az effektív hatás minden skálán ugyanolyan alakú, ezért Λ tetszőlegesen nagyra választható, így a fentebb említett feltétel mindig teljesül. Ekkor az Λ^{-n} $n = 1 \dots$ típusú kifejezésekkel arányos tagok mind elhanyagolhatóak. Az első el nem tűnő tagokat megtartva $U_{ren}(\varphi)$ az alábbi alakot ölti:

$$U_{ren}(\varphi) = U(\Lambda, \varphi) + \frac{\mathcal{N}_F}{12\pi^2} \left[\Lambda^4 - \Lambda^2 g^2 \varphi^2 + \frac{3}{2} g^4 \varphi^4 \ln \frac{\Lambda}{M^*} + g^4 \varphi^4 \left(\frac{3 \ln 2}{2} - \frac{7}{8} \right) \right]. \quad (3.4)$$

Feltéve, hogy $U_{ren}(\varphi)$ véges marad növekvő Λ esetén is, az eredmény független az UV levágási skálától. Ekkor a fentebb bevezetett $U_{ren}(\varphi)$ használatával írható a teljes potenciálra:

$$U(k, \varphi) = U_{ren}(\varphi) - \frac{\mathcal{N}_F}{8\pi^2} \left[q\omega_q \left(\frac{2}{3}q^2 - g^2\varphi^2 \right) + g^4\varphi^4 \ln \frac{q + \omega_q}{M^*} \right]_{q=\max(k, k_F)}. \quad (3.5)$$

A (3.1) FRG egyenletet a levágási skála és $k = 0$ között kell integrálni, ezért a Landau-potenciál, melyre a továbbiakban az egyszerűség kedvéért egyszerűen szabadenergiaként hivatkozom, véges kémiai potenciálon a $k = 0$ érték behelyettesítésével kapható meg, azaz $U_\mu(\varphi) = U(k = 0, \varphi)$. Felhasználva még, hogy $\omega_F(k_F) = \mu$, a

szabadenergia az alábbi alakba írható:

$$U_\mu(\varphi) = U_{ren}(\varphi) - \frac{\mathcal{N}_F}{8\pi^2} \left[k_F \mu \left(\frac{2}{3} k_F^2 - g^2 \varphi^2 \right) + g^4 \varphi^4 \ln \frac{k_F + \mu}{M^*} \right] \Theta(\mu - g\varphi). \quad (3.6)$$

A (3.6) egyenlettel adott szabadenergia $\mu = 0$ kémiai potenciálon felvett értékét hasznos elkülöníteni a véges kémiai potenciálhoz tartozó járulékoktól. A nulla kémiai potenciálhoz tartozó rész:

$$U_0(\varphi) \equiv U(\mu = 0, \varphi) = U_{ren}(\varphi) - \frac{\mathcal{N}_F}{8\pi^2} g^4 \varphi^4 \ln \frac{g\varphi}{M^*}. \quad (3.7)$$

A fenti egyenletet felhasználva írható, hogy

$$U_\mu(\varphi) = U_0(\varphi) - \frac{\mathcal{N}_F}{8\pi^2} \left[k_F \mu \left(\frac{2}{3} k_F^2 - g^2 \varphi^2 \right) + g^4 \varphi^4 \ln \frac{k_F + \mu}{g\varphi} \right] \Theta(\mu - g\varphi). \quad (3.8)$$

A képletben szereplő $\Theta(\mu - g\varphi)$ szorzóra azért van szükség mert k_F csak akkor értelmezhető, ha igaz, hogy $\mu > g\varphi$, ami látható a (2.21) egyenletből. A (3.8) egyenletben a szabadenergia véges kémiai potenciálhoz tartozó része már megegyezik a szokásos fermionikus hurok korrekcióval [12, 50].

A fenti számolás elvégezhető a 2. fejezetben leírt módszer közvetlen alkalmazásával is. Ez kiváló lehetőség a módszer ellenőrzésére, validálására. Először meg kell oldani az egyenletet a $\mathcal{D}_>$ tartományon $\mu = 0$ esetben. Ezek a feltételek megfelelnek a $k_F \rightarrow 0$ helyettesítésnek a (3.5) egyenletben. A következő lépés, hogy kivágjuk a Fermi-felület által határolt területet a $k - \varphi$ síkból, és ezzel meghatározzuk a $\mathcal{D}_<$ tartományon érvényes differenciálegyenlet kezdeti feltételét. A (2.31) egyenlet miatt igaz, hogy $V_0(x) = U_>(K(x), x)$, ami ugyanaz mint a (3.6) egyenlet a $\varphi \rightarrow x$ helyettesítéssel:

$$V_0(x) = U_\mu(x). \quad (3.9)$$

A $\mathcal{D}_<$ tartományon érvényes differenciálegyenlet nem triviális, még a bozonikus fluktuációk elhanyagolása esetén sem. Az átlagtér megoldáshoz el kell hanyagolni a sugárzási korrekciókat a megoldás során, ami ebben az esetben a (2.38) egyenlet utolsó tagjának elhagyását jelenti. Az így kapott egyenlet:

$$x \partial_x \tilde{u} = -x V'_0 + y \partial_y \tilde{u}. \quad (3.10)$$

Ez az egyenlet egzaktul megoldható, a megoldás pedig az alábbi alakú:

$$\tilde{u}(x, y) = V_0(xy) - V_0(x). \quad (3.11)$$

A megoldás alakja a fentebb is használt szokásos változóiban:

$$U(k=0, \varphi) = \tilde{u} \left(x = \frac{\mu}{g}, y = \frac{g\varphi}{\mu} \right) + V_0 \left(x = \frac{\mu}{g} \right) = V_0(\varphi) = U_\mu(\varphi), \quad (3.12)$$

ami megegyezik a fentebb, más módszerrel kapott (3.8) eredménnyel. Mivel a (3.10) egyenlet hasonló alakú a fluktuációkat tartalmazó esethez, ezért a megoldás is hasonló alakú lesz, emiatt az átlagtér eset nagyon jól használható a numerikus módszer tesztelésére.

A modell paraméterezése

A konkrét számoláshoz rögzíteni kell a potenciál alakját. A Yukawa-modellt definiáló (2.1) egyenlet alapján spontán sértett potenciált vettem fel, amivel biztosítható a σ -mezont leíró skalártér véges várható értéke, és így az általa generált nukleon tömeg véges értéke:

$$U(\varphi) = \frac{\lambda}{24} (\varphi^2 - v^2)^2 \quad (3.13)$$

A potenciál alakja rögzíti, mely csatolások futása vizsgálható az FRG módszerrel. Az egyenletek megoldásához szükség van kezdeti feltételekre is, azaz rögzíteni kell a csatolásokat a levágási skálán a $k = \Lambda$ értéken. Számításaim során $\Lambda = 1,4 \text{ GeV}$ értéket használtam [2, 72, 78]. A (2.1) egyenlet által adott Yukawa-modell nem tartalmaz elég paramétert ahhoz, hogy az 1.1. táblázatban adott minden nukleáris paraméter értékét rögzíteni lehessen. A modell vizsgálatához, úgy választottam meg a paramétereket, hogy azok reprodukálják a nukleonok tömegét, és a skalártér várható értékét a szimmetriasértés után [70, 78, 79]. Ezeket figyelembe véve a (3.13) potenciál kifejezésében lévő paraméterek között az alábbi összefüggések vannak:

$$v = f_\pi, \quad g = \frac{m_N}{v} \quad \text{és} \quad \lambda = \frac{3m_\sigma^2}{v^2}, \quad (3.14)$$

ahol m_N a fermion tömeg, m_σ skalármezón görbületi tömege a $\varphi = v$ pontban és f_π pion bomlási állandó. Az előző három mennyiség értékének megadásával a modell meghatározott. A nukleon tömeg és a pion bomlási állandó estében azok irodalmi értékét használtam a paraméterezéshez [71], a skalármezón tömegének értékéül pedig a nukleon tömeget választottam:

$$m_N = 0,938 \text{ GeV}, \quad f_\pi = 0,093 \text{ GeV} \quad \text{és} \quad m_\sigma = m_N. \quad (3.15)$$

Fontos megjegyezni, hogy a σ -mezón tömege nem a pion-pion ütközésben az $I = 0$ s -hullám csatornában a $\sqrt{s} \approx (500 - i 300) \text{ MeV}$ értéknél megjelenő pólusnak felel meg [72, 80]. Ebben a modellben a σ -skalármezón az erős kölcsönhatás egy komponensének leírására szolgál, és értékét úgy választottam meg, hogy a modell a fentebb említett illesztési feltételeknek megfeleljen. Az igen széles σ -rezonancia tömegét a mezontömeg

fenti megválasztása felülről becsüli, így konzervatívabb módon vesszük figyelembe a mezon hatását mintha csak a σ tömegének középértékét használnánk.

Mivel λ csatolás négyzetesen függ a mezon tömegtől, így annak értékét is felülről becsüljük, erősebb csatolást tételezünk fel, ami szintén konzervatív becsléshez vezet. A fenti értékek megválasztása mellett rögzíteni kell a kémiai potenciált is, ami a futási egyenletek „külső” változója. A paraméterek illesztéséhez azt a kémiai potenciál értéket választottam, ahol az átlagtér közelítés estén elsőrendű fázisátalakulás tapasztalható, ez $\mu_{MF} \approx 0,6177 m_N$. A paraméterek fenti megválasztásával egy konzervatív becslés adható a kvantumfluktuációk által okozott eltérésekre az effektív potenciálban, és így az állapotegyenletben is.

Numerikus megoldás

Visszatérve az általánosabb problémára a (2.55) egyenletet kell numerikusan megoldani a potenciál futásának meghatározásához. Ehhez a potenciált harmonikus bázisban kell kifejtteni a 2.0.2. fejezetben leírtaknak megfelelően. A báziselemek számát \mathcal{N} jelöli, a négyzetgyökös kifejezés sorfejtésének rendje pedig \mathcal{P} .

A numerikus eredmények ismertetése előtt érdemes tisztázni egy technikai részletet. A potenciál evolúciója $x = 0$ pontból indul, azonban itt a deriváltak együtthatói eltűnnek. Ezt a nehézséget úgy oldottam meg, hogy feltettem, hogy az x kis értékeire az együtthatók $c_n \sim xu_n$ módon viselkednek, miközben figyelembe vettem, hogy $c_n(x = 0) = 0$ a (2.41) egyenlet miatt. Ekkor lineáris rendben igaz, hogy

$$xu_n = -xV'(0)A_n + x \sum_m u_m B_{mn} + \mathcal{O}(x^2), \quad (3.16)$$

amiből az következik, hogy

$$\sum u_m (B_{mn} - \delta_{mn}) = V'(0). \quad (3.17)$$

Azonban a (2.25) és a (2.37) egyenletekből látható, hogy

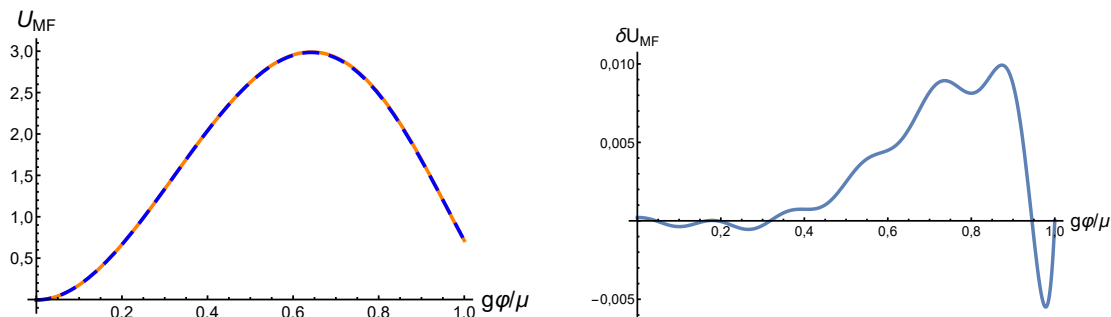
$$V'(x) = -\frac{g^2 x}{k} \partial_k U(k, x) + \partial_\varphi U(k, x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \partial_\varphi U(k, 0) = 0, \quad (3.18)$$

ahol kihasználtuk a potenciál párosságát. A fentiek miatt minden $c_n(x)$ együttható legalább $\mathcal{O}(x^2)$ módon indul. Numerikus szempontból ezért biztonságos a potenciál fejlődését az $x_0 \ll \mu$ pontból indítani $c_n(x_0) = 0$ együtthatókkal. A gyakorlatban a tipikusan $x_0/\mu \sim 10^{-4}$ nagyságrendű értékeket vettem a program futtatásához.

A 3.1. fejezetben leírtaknak megfelelően az átlagtér megoldás két módon is megkapható: az egyenletek közvetlen megoldásával, vagy a kvantumfluktuációk kezelésére is alkalmas módszer alkalmazásával erre az egyszerűbb esetre. A két módon nyert megoldás összehasonlításával képet kaphatunk a módszer pontatlanságáról a báziselemek

számának függvényében.

Az átlagtér potenciál alakja $\mathcal{N} = 10$ elemű bázis használata esetén és a fentebb említett két módszer közötti eltérés a 3.1. ábrán látható. A különbség nagyságrendje egy százalék, ami tipikus értéknek tekinthető az összes eredmény szempontjából is.



3.1. ábra. Bal oldal: A numerikus módszerrel és a közvetlen számolással kapott átlagtér megoldás összehasonlítása. Jobb oldal: A két féle megoldás közötti eltérés, a numerikus módszer hibája. Az U potenciál az $y = \frac{g\varphi}{\mu}$ átskálázott új változó függvényében látható, amit a (2.30) és a (2.37) egyenletek definiálnak.

3.2. Bozonikus fluktuációk

A bozonikus fluktuációk figyelembevételéhez a teljes (2.23) egyenletrendszert kell megoldani a 2. fejezetben kifejtett módon. Az eljárásnak megfelelően először a $\mu = 0$ esetet kell venni, vagyis a (2.23a) egyenletet a $\mathcal{D}_>$ tartományon. Ennek megoldása használható a külső tartományon is a $\mu \neq 0$ esetben. Ezeken a tartományokon alkalmazható a szokásos módszer a potenciál hatványsor alakban történő kifejtésére, azaz az $U_0(k, \varphi)$ potenciál kereshető φ^2 polinomjaként a v^2 kifejtési pont körül:

$$U_k(\varphi) = U_0 + \frac{m_k^2}{2} (\varphi^2 - v_k^2) + \frac{\lambda_k}{24} (\varphi^2 - v_k^2)^2. \quad (3.19)$$

A potenciál ilyen alakjával a szimmetrikus és a szimmetriasértett esetek egyaránt kezelhetők. Az első esetben a mezőt nulla körül kell sorba fejteni, ekkor $v^2 = 0$. A második esetben v jelenti a potenciál minimumhelyét, ekkor $m^2 = 0$. Az általános tárgyalásmód kedvéért érdemes megtartani mindkét változót és csak a megoldás során, a paraméterek rögzítése után kiválasztani a megfelelő kifejtési pontot.

A (2.23a) egyenletet φ^2 szerint v^2 körül hatványsorba fejtjük. Az eredeti egyenletnek a sorfejtés után is teljesülnie kell a kifejtés minden rendjére külön-külön. Ez a

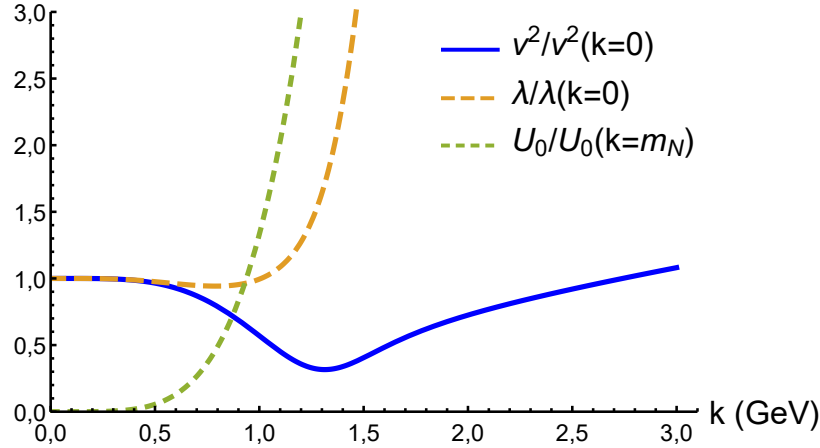
feltétel az alábbi differenciálegyenletekre vezet:

$$\begin{aligned}
\partial_k U_0 - \frac{m_k^2}{2} \partial_k v_k^2 &= \frac{k^4}{12\pi^2} \left[\frac{1}{\omega_B} - \frac{4}{\omega_F} \right], \\
\frac{\lambda_k}{6} \partial_k v_k^2 - \partial_k m_k^2 &= \frac{k^4}{12\pi^2} \left[\frac{\lambda_k}{2\omega_B^3} - \frac{4g^2}{\omega_F^3} \right], \\
\partial_k \lambda_k &= \frac{3k^4}{\pi^2} \left[\frac{\lambda_k^2}{16\omega_B^5} - \frac{g^4}{\omega_F^5} \right],
\end{aligned} \tag{3.20}$$

ahol $\omega_B^2 = k^2 + m_k^2 + \frac{\lambda_k}{3} v_k^2$ a bozonikus szabadsági fokhoz tartozó energia, másrészt $\omega_F^2 = k^2 + g^2 \varphi^2$ pedig a fermionikus szabadsági fokhoz tartozó energia.

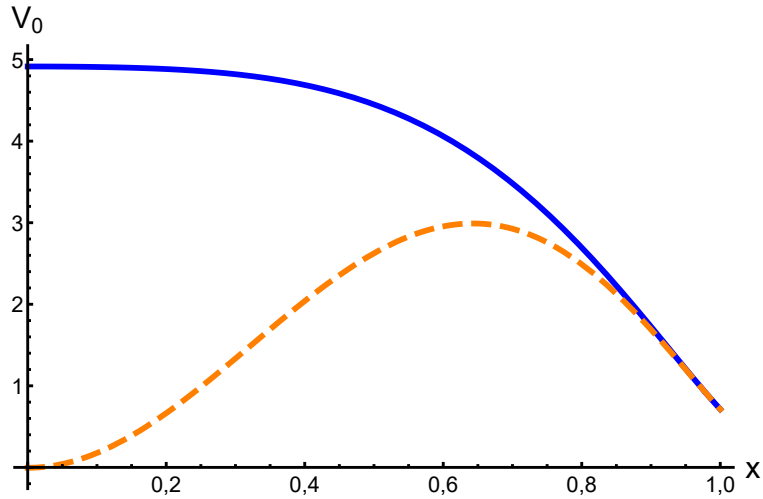
A (3.15) által megadott paramétereket használva a potenciál szimmetrikus, ennek megfelelően kell használni a fentebb leírt általános kifejtést. A (3.20) egyenletek megoldása adja a csatolások futását a k skála függvényében a $\mu = 0$ esetben. A (3.20) egyenlet megoldása három függvény a $v(k)$, $\lambda(k)$ és $U_0(k)$, azaz a skálafüggő csatolások. A három csatolással a (3.19) egyenlettel adott, $\mu = 0$ esetben érvényes potenciál a k skála minden értékére meghatározható.

A csatolások értéke a k skála függvényében a 3.2. ábrán látható. A skalártér várható értéke $v(k)$ nem változik annyit a kezdeti értékéhez képest, mint a másik két csatolás: $v(k)$ változása a futás során maximum 50 % míg másik két csatolás attól függően, hogy milyen magas k értékekig vizsgáljuk a futást akár 300 % is lehet az eltérés.



3.2. ábra. Az ábrán a (3.20) egyenletek megoldása látható, azaz a $v(k)$, $\lambda(k)$ és $U_0(k)$ csatolások futása a $\mathcal{D}_>$ tartományon. Az ábrán a csatolások normálva láthatóak a könnyebb összehasonlíthatóság céljából.

Miután a megoldás minden k -ra és φ -re rendelkezésre áll, a peremfeltételek meghatározhatóak a belső tartományon történő számításokhoz. Ehhez a k - φ síkból „kivágjuk” a megfelelő részt felhasználva a (2.31) egyenletet és a $V_0(x) = U_>(K(x), x)$ összefüggést. Az eredményül kapott $V_0(x)$ határfeltétel a 3.3. ábrán látható. A (2.55) egyenlet ebből kezdeti feltételből kiindulva megoldható. A numerikus implementációs során $\mathcal{N} = 8$ báziselemet használtam, ami a 3.1. fejezetben leírtakhoz hasonlóan elég



3.3. ábra. A (3.20) egyenletek $\mu = 0$ esetén érvényes megoldásának értéke, $V_0(x)$, a $\mu = \mu_{MF}$ kémiai potenciál által meghatározott Fermi-felületen (folytonos kék vonal). A véges kémiai potenciál hatása a Fermi-felület alatt érvényesül, ezért a (2.31) egyenlet alapján $V_0(x)$ adja az effektív potenciál evolúciójának Fermi-felületen belüli leírásához szükséges peremfeltételeket. Mellette összehasonlításképpen az átlagtér közelítéssel kapott eredmény szerepel (szaggatott narancs görbe).

volt a közelítésből adódó hibák ábrázolási vonalvastagság alá csökkentésére. Megvizsgáltam a megoldás alakját az inverz gyök $\mathcal{P} = 0, 1, 2, 3$ és 4-ed rendű kifejtése esetén. Minden egyes kifejtési tag hozzávétele a numerikus megoldáshoz egyre kisebb korrekciót jelent, azaz minél nagyobb \mathcal{P} értéket választunk annál jobb közelítés kapható a megoldásra. A végeredményt befolyásolja az M^* regulátor tömegnégyzet értéke is melyet számos próbálkozás után az alábbi értékre állítottam a számítások során:

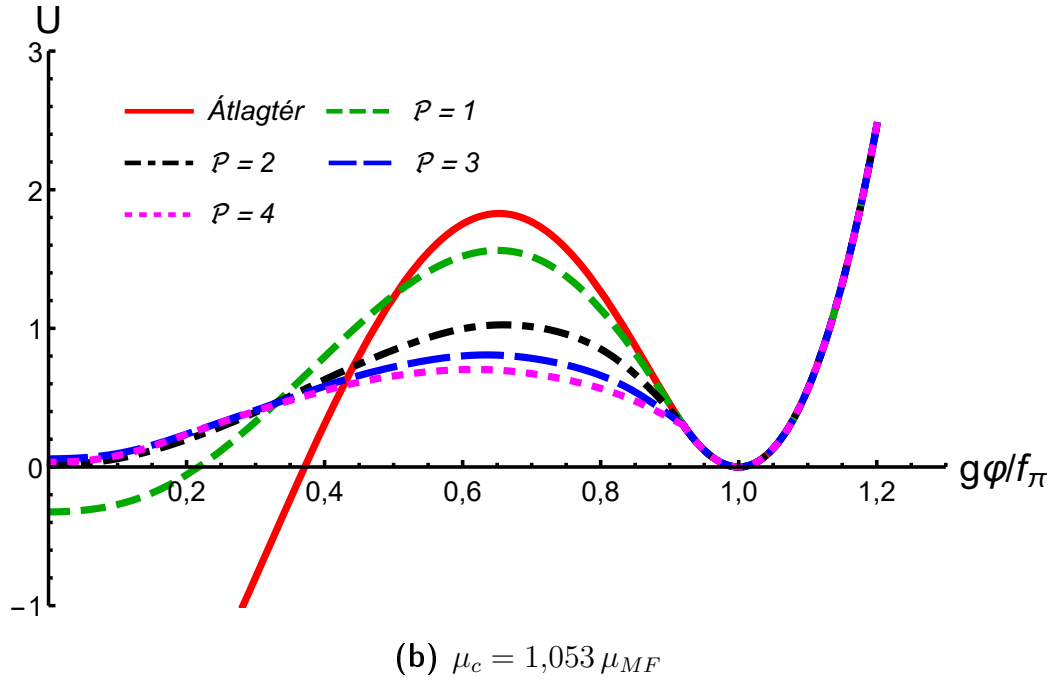
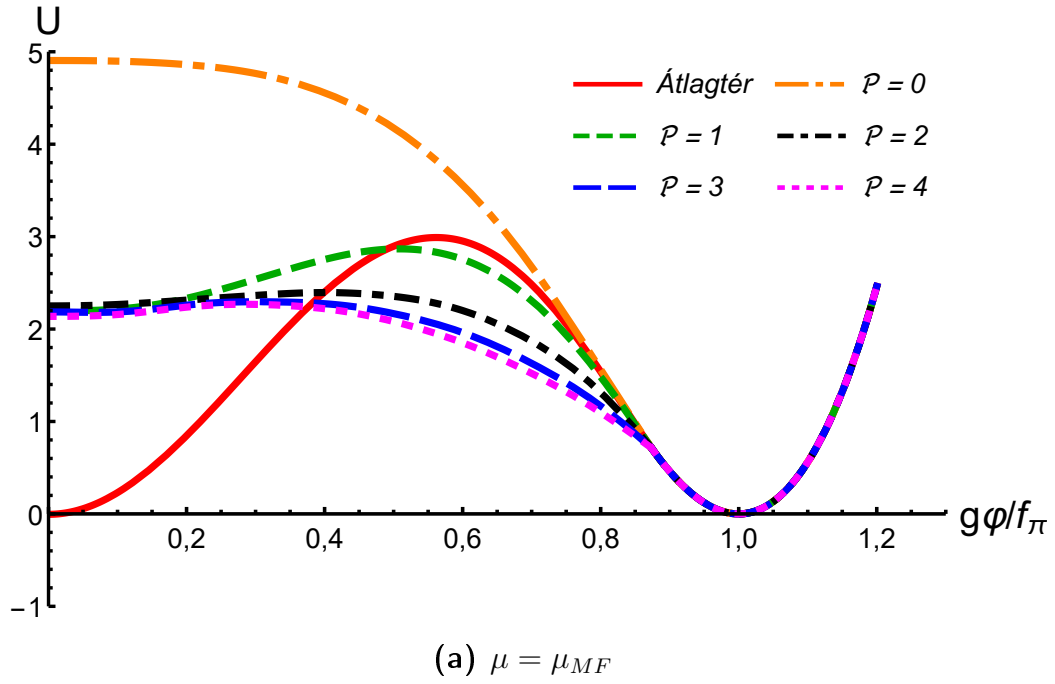
$$M^* = U''(\varphi = \mu)/18. \quad (3.21)$$

Az M^* regulátor tömeg fenti értéke mellett a megoldás kedvező konvergenciatulajdonságokat mutat: gyorsan csökkennek a magasabb \mathcal{P} értékekhez tartozó kifejtési együtthatók által okozott korrekciók, így a kívánt pontosság eléréséhez kevesebb kifejtési tag figyelembevétele is elég.

Miután egy adott kémia potenciálon $V_0(x)$ -et a fentebb leírt módon meghatároztuk, rendelkezésre áll a szükséges peremfeltétel az effektív potenciál Fermi-felületen belüli kifejtéséhez és evolúciójának meghatározásához. Ez a 2.2. ábrán látható $\mathcal{D}_<$ tartományon érvényes megoldás meghatározását jelenti a 2.0.2. fejezetben leírt módon. A futási egyenletek véges kémiai potenciálon érvényes teljes megoldása a 3.4. ábrán látható. Hasonló, némiképp nagyobb, $\mu_c = 1,053 \mu_{MF}$ kémiai potenciálon elvégzett analízis eredményét mutatja a 3.4b. ábra.

Az FRG módszerrel történő számolás esetén az elsőrendű fázisátalakulás a modellben ezen a kémiai potenciálon megy végbe, ha a (3.14) egyenletben leírt csatolások által definiált (3.15) munkapontban vizsgáljuk a modellt.

A 3.4. ábrán látható teljes megoldás két tartományra osztható, melyeken a megoldás különböző módon viselkedik: az első tartományon a megoldás konvex a másodikon pedig konkáv. A két tartományon tapasztalható eltérő viselkedés azzal magyarázha-



3.4. ábra. Az FRG módszer alkalmazásával számított effektív potenciál. A különböző görbék a 2.55 egyenletben szereplő radiatív korrekciók különböző rendű kifejtésének felelnek meg. A piros vonal az átlagtér közelítés eredménye, a narancs, a zöld, a fekete, a kék és a magenta vonalak (fentről lefelé haladva) rendre a $\mathcal{P} = 0, 1, 2, 3$ és 4 kifejtéseknek felelnek meg. A felső panelon $\mu = \mu_{MF}$ az átlagtér közelítés esetén érvényes kritikus kémiai potenciál mellett meghatározott megoldások szerepelnek, az alsó ábrán pedig az FRG megoldás esetén igaz $\mu = \mu_c = 1.053\mu_{MF}$ „valódi” kritikus kémiai potenciál értéken elvégzett számolások eredménye szerepel. Az alsó panelon a $\mathcal{P} = 0$ eset már nincs feltüntetve, az átlagtér közelítéshez tartozó görbe a tengelyt az $U_{MF}(\varphi = 0) = -2.92$ értéknél metszi.

tó, hogy az FRG egyenletek megoldása, az effektív potenciál, konvex függvény kell, hogy legyen a rendszer termodinamikai stabilitása miatt [61, 64, 76]. A megoldás viselkedése szemléletesen látható a (2.15) egyenlet segítségével. A bozonikus szabadsági fokok energiája a (2.16) egyenlettel adott, azaz a futási egyenletekben az alábbi gyökös kifejezés szerepel, ami jelentősen befolyásolja a megoldás konvergenciáját:

$$\sqrt{k^2 + \partial_\varphi^2 U}. \quad (3.22)$$

Ahogy a numerikus integrálás során a skála közelít $k = 0$ értékhez a gyök alatti kifejezést egyre jobban a potenciál deriváltja határozza meg. Ahol a potenciál konkáv, és ezért második deriváltja negatív, a deriválnak egyszerre kell csökkennie a k skálával, hogy a gyök alatti kifejezés pozitív maradjon, és a négyzetgyök valós értéket vegyen fel. Bármilyen kis numerikus pontatlanság a második derivált kiszámítása esetén azt eredményezheti, hogy a (3.22) kifejezésben szereplő második derivált negatív voltát nem tudja kompenzálni a pozitív k^2 tag, ezért a kifejezés komplex értéket vesz fel, és elvesztjük a megoldást. Ez az effektus numerikusan úgy jelenik meg, hogy a $k = 0$ értékhez közeledve egyre kisebb lépésközt kell választani, aminek köszönhetően a potenciál is egyre kevesebbet és kevesebbet változik, így a derivált kiszámításánál fellépő esetleges pontatlanságok is kisebbek és nem válik a négyzetgyök alatti kifejezés negatívvá. A lépésköz csökkenése miatt a konvergencia lassú. Ez a probléma nem lép fel, ha a potenciál konvex, ugyanis ekkor $k = 0$ közelében a gyökjel alatti kifejezés mindig pozitív, mert a potenciál második deriváltja pozitív.

A harmonikus kifejtéssel történő megoldás során nem pontonként közelítjük a megoldást, ezért az itt kifejtett probléma máshogy jelenik meg. Mivel a peremfeltételek rögzítik a potenciál értékét a határon, ha $\mu \leq \mu_c$, akkor az egzakt effektív potenciál állandó. Ezért, ahogy az $\mathcal{P} \rightarrow \infty$ limesz felé közelítünk, egyre laposabb és laposabb effektív potenciált találunk, amíg a határesetben teljesen ki nem simul a függvény. A megoldás ilyen viselkedés miatt pontonkénti konvergencia nem várható a potenciál számítása során.

Azon a tartományon ahol φ minden értékre a potenciál görbülete pozitív, a teljes megoldás kifejtése gyorsan konvergál. Mivel a fentebb említett tartományban az effektív potenciál konvex módon indul a levágási skáláról, gyorsan konvergál az ugyancsak konvex egzakt megoldáshoz.

Abban a tartományban ahol a potenciál görbülete negatív, az effektív potenciál konkáv. Itt a megoldás konvergenciája sokkal lassabb, mint a fentebb említett tartományon ahol a potenciál konvex. A fentiek alapján az egzakt megoldás görbületének nemnegatívnak kell lennie, amit a skála $k = \Lambda$ értékél felvett szimmetriasértő kezdeti feltételből kiindulva kell elérnie a megoldásnak a $k = 0$ pontban. A konkáv megoldás egyre laposabbá válva közelíti meg a futási egyenletek által megkövetelt konvex végeredményt. Az átlagtér közelítés ($\mathcal{P} = 0$) és az egyhurok eredmény ($\mathcal{P} = 1$) között viszonylag nagy a különbség, az egyhurok számítás és a $\mathcal{P} = 2$ rendű kifejtés

között viszont már kisebb az eltérés, azonban még mindig jól megfigyelhető, főleg a 3.4b. ábrán. A potenciál $\mathcal{P} = 2, 3, 4$ rendű kifejtéseihez tartozó görbék már majdnem átfednek, kicsi a relatív különbség köztük. Látható, hogy az egyre laposabbá váló potenciál leírásához egyre nagyobb \mathcal{P} és \mathcal{N} értékekre van szükség, a megoldás lassan konvergál. Ez a fentebb említett, (3.22) négyzetgyökös kifejezés által okozott instabilitás megnyilvánulása a harmonikus kifejtésen alapuló megoldásban.

A fenti megfontolások alapján $\mathcal{P} = 2$ vagy 3 rendű kifejtéshez tartozó megoldásokat tekintettem az átlagolt effektív potenciál legjobb durva szemcsés („coarse grained”) közelítésének. Ezek a megoldások elegendően pontosak a termodinamikai számítások elvégzéséhez. Azokban a pontokban ahol a potenciál görbülete pozitív ezeken a \mathcal{P} értékeken a megoldás már jó közelítés a gyors konvergencia miatt. A másik tartományon ahol a potenciál görbülete negatív a közelítés rendje nem befolyásolja a termodinamikát, mert adott kémiai potenciálon a nyomást a potenciál minimuma határozza meg, ami a másik tartományban van. Fontos, megjegyezni azonban, hogy olyan mennyiségek mint például a felületi feszültség, nem számíthatók ki megbízhatóan ezekből a közelítésekből.

A most bemutatott módszer nagyon gyors és hatékony módja az effektív potenciál releváns részének kiszámítására. A $\mathcal{P} = 2, 3$ értékekhez tartozó numerikus számítások pár másodpercig tartanak egy személyi számítógépen, és a numerikus megoldás gyorsan konvergál. Tapasztalataim alapján a megoldás stabil a kifejtési báziselemek számának és az M^* értékének változtatására nézve.

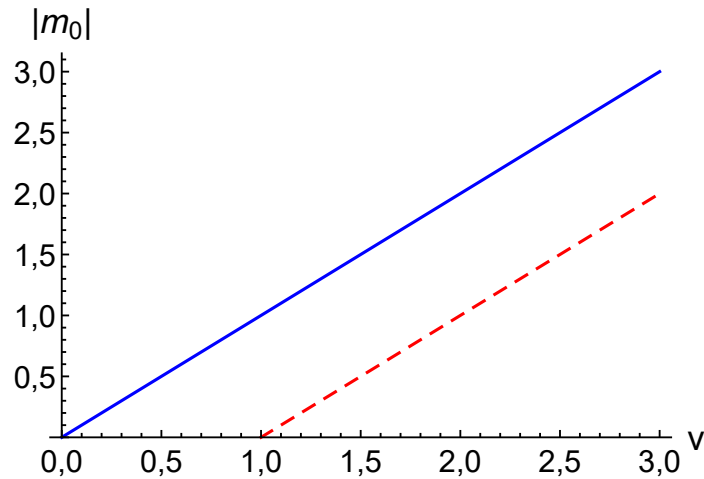
3.3. A kvantum korrekciók hatása a fázisdiagramra

A bevezetőben említettek szerint a bozonikus fluktuációk fontos szerepet játszanak az erős kölcsönhatás fázisdiagramjának meghatározásában [74]. Doktori munkám egyik célja, hogy megbecsüljem a bozonikus fluktuációk hatását a maganyag effektív modelljeiben, ezért megvizsgáltam, hogy hogyan változik a 2. fejezetben bemutatott Yukawa-modellben lévő fázisátalakulás rendje a csatolásokat változtatva. A Yukawa-modell (2.1) definiáló egyenletében szereplő paraméterek közül két csatolás hatását vizsgáltam: a fermionterek és a skalártér közötti Yukawa-csatolást, g -t és a skalártér negyed rendű önkölcsönhatásának erősségét szabályozó λ -t. Ennek megfelelően, a fázisátmenet határának megtalálása a csatolások $g - \lambda$ síkján, egy $g_c(\lambda)$ görbe megadását jelenti.

A görbe megtalálásához először ki kell választani a λ és g csatolások aktuális értékét, majd meg kell vizsgálni az effektív potenciál minimumhelyeinek változását a kémiai potenciál függvényében. A kémiai potenciál kis értékeire a rendszer a szimmetriasértett fázisban van a potenciál konstrukciója miatt. A potenciálnak minimuma van a $\varphi = \pm v \neq 0$ helyen a Z_2 szimmetria miatt, hiszen $\varphi \leftrightarrow -\varphi$. A modell Z_2 szimmetriája megköveteli, hogy $\varphi = 0$ pontban a meredekség nulla legyen, ezért itt a

potenciálnak szélsőértéke van. A szélsőérték típusát a potenciál m_0^2 második deriváltjának előjele határozza meg. A potenciálnak maximuma van, ha $m_0^2 < 0$, minimuma, ha $m_0^2 > 0$, illetve inflexiós pontja az $m_0^2 = 0$ esetben. A szimmetriasértő potenciál esetében a $\varphi = 0$ pontban m_0^2 negatív, azaz maximumról van szó.

Ha ebből a helyzetből kiindulva elkezdjük növelni a kémiai potenciált v és $|m_0^2|$ egyaránt csökken, és előbb utóbb nullává válnak. Két eset fordulhat elő: $|m_0^2|$ előbb éri el a nullát mint $|v|$, vagy egyszerre válnak nullává. Ha a potenciál második deriváltja a $\varphi = 0$ pontban eléri a nullát, azaz $m_0^2 = 0$, miközben v még mindig pozitív, akkor a potenciálnak új minimuma alakul ki, ami elsőrendű fázisátalakuláshoz vezet. Ezzel ellentétben, ha v és m_0^2 egyszerre válnak nullává, akkor másodrendű fázisátalakulás van a rendszerben. Ezeket a megfontolásokat felhasználva azonosíthatjuk a fázisátalakulások rendjét úgy, hogy elég csak a potenciál $\varphi = 0$ pontbeli második deriváltját és a minimumhelyét követni, ez látható a 3.5. ábrán. Megjegyzendő, hogy ezzel a módszerrel, csak másodrendű deriváltakra van szükség a fázisátalakulás rendjének azonosításához. Az elsőrendű fázisátalakulás tartományában a potenciál görbülete az

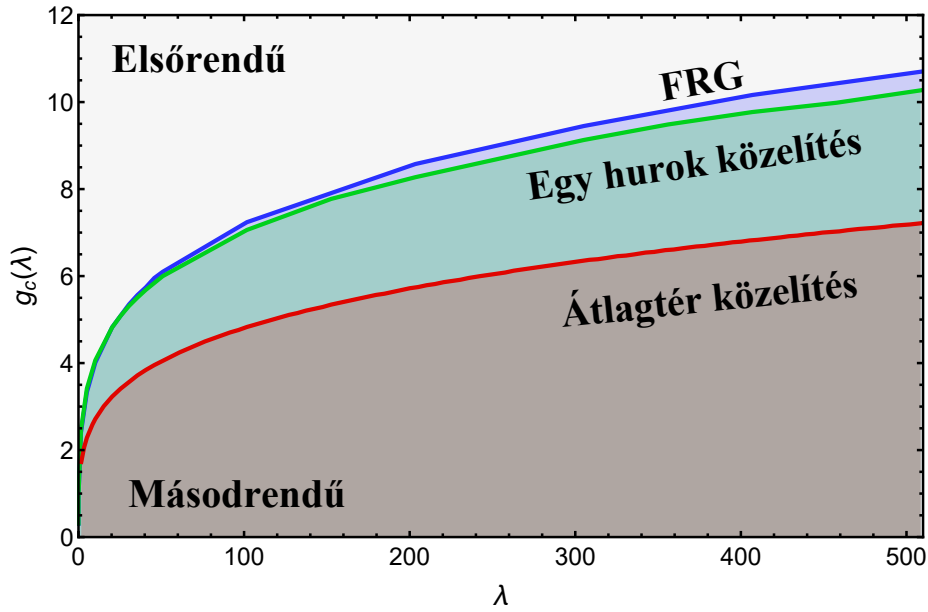


3.5. ábra. A fázisátalakulás típusának meghatározása: ha a $|m_0^2| - v$ görbe a nullát $v = 0$ -nél metszi, akkor másodrendű fázisátalakulásról van szó, ha pedig bármilyen más pozitív v értéknél, akkor elsőrendű fázisátalakulás jön létre.

$m_0 = 0$ értéket egy adott $\mu = \mu_u(\lambda, g)$ kémiai potenciálnál éri el, ahol $v = v_c(\lambda, g)$. A $v_c(\lambda, g_c(\lambda)) = 0$ egyenletet megoldva meghatározhatjuk, hogy hol jelenik meg a másodrendű fázisátalakulás, így az eredményül kapott $g_c(\lambda)$ görbe jelenti a határvonalat az elsőrendű és másodrendű fázisátalakulások tartománya között.

A határoló görbe a fentebb leírt módon meghatározható az átlagtér közelítéssel, az egyhurok korrekciókkal és az FRG módszerrel kiszámított potenciál esetére. Az egyhurok közelítés könnyen hozzáférhető az FRG számolásból, ha az inverz gyök kifejtése során csak az első tagot tartjuk meg, és a kifejtési pontnak a σ -mezon tömegét használjuk. Az FRG számoláshoz a konkrét számítások során 12 elemű bázist használtam a harmonikus kifejtésre, és másod illetve harmad rendig fejtettem ki a négyzetgyökös kifejezést. Az eredményül kapott grafikonok a 3.6. ábrán láthatóak.

A 3.6. ábrán a sötétebb tartományokon a másodrendű a világos részekben elsőrendű fázisátalakulást találunk. A g Yukawa-csatolás kis értékeire a fázisátalakulás



3.6. ábra. A skalár Yukawa-model fázisdiagramja a csatolások terében, a $\lambda - g$ síkon. A sötétebb régiókban a fázisátalakulás másodrendű, a világosabbakban elsőrendű. A görbék alulról felfelé haladva rendre az átlagtér, az egyhurok és az FRG számolásoknak felelnek meg. Látható, hogy bizonyos tartományokon az átlagtér közelítés szerint a fázisátalakulás elsőrendű, az FRG számolás szerint azonban másodrendű.

másodrendű, míg a nagy értékeire elsőrendű. A a különböző fázisátalakulásoknak megfelelő régiókat elválasztó határvonal helye a közelítés rendjétől függ. Az átlagtér számítás (ami a fagráf szintű közelítésnek felel meg a bozonokat illetően) jósolja a legerősebb fázisátalakulást abban az értelemben, hogy g növelésével ebben a közelítésben érjük el először az elsőrendű fázisátalakulást. Ez azt jelenti, hogy van olyan régió, ahol az átlagtér közelítés már elsőrendű fázisátalakulást jósol, de a magasabb rendek hatását figyelembe vevő FRG számolás még másodrendűt. Az egyhurok közelítés elég jó abban az értelemben, hogy csak nagyon kis mértékben jósol erősebb fázisátalakulást, mint az FRG módszer. Érdeemes megemlíteni, hogy a fentebb leírt viselkedés megfigyelhető más modellek esetében is [69, 81].

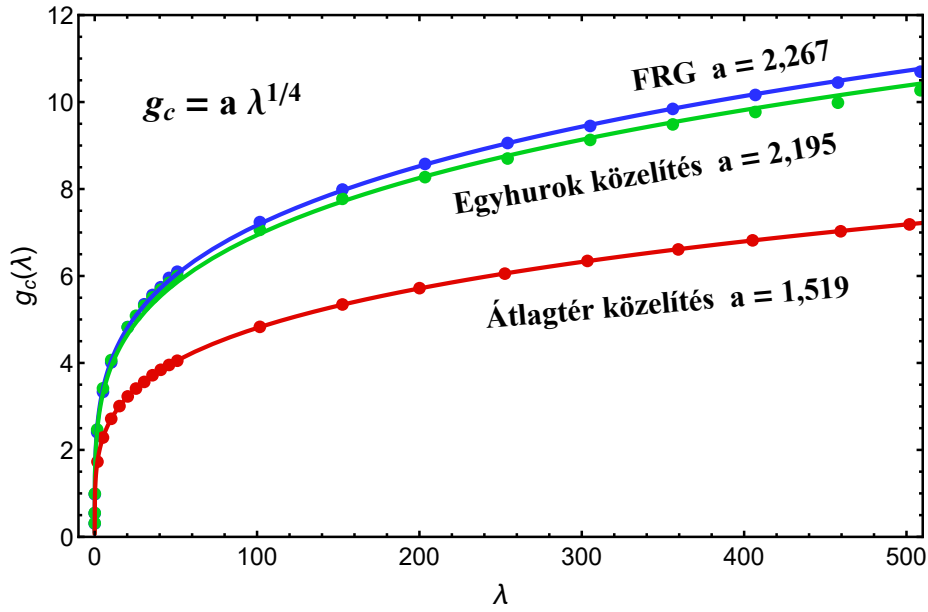
A fázisokat elválasztó határvonal jól illeszthető az alábbi analitikus függvényvel:

$$g_c(\lambda) \approx a\lambda^{1/4}. \quad (3.23)$$

A (3.23) egyenlet alapján illesztett görbék a 3.7. ábrán láthatóak, az illesztési paraméter értékével együtt a különböző esetekben. Az, hogy a (3.23) egyenlet által megadott alak miért közelíti jól a fázishatárt az alábbi módon látható. Az effektív potenciál analitikus a $\varphi = 0$ pont körül, ezért kis v vákuum várható értéke esetére a potenciál sorba fejthető $\varphi = v$ körül:

$$U(\varphi) = A(\varphi^2 - v^2)^2 + B(\varphi^2 - v^2)^3 + \dots \quad (3.24)$$

Innen látható, hogy ha $A > 0$ miközben $v \rightarrow 0$ akkor egy másodrendű fázisátalakulásról van szó, ha pedig $A < 0$ miközben $v \rightarrow 0$ elsőrendű fázisátalakulás következik.



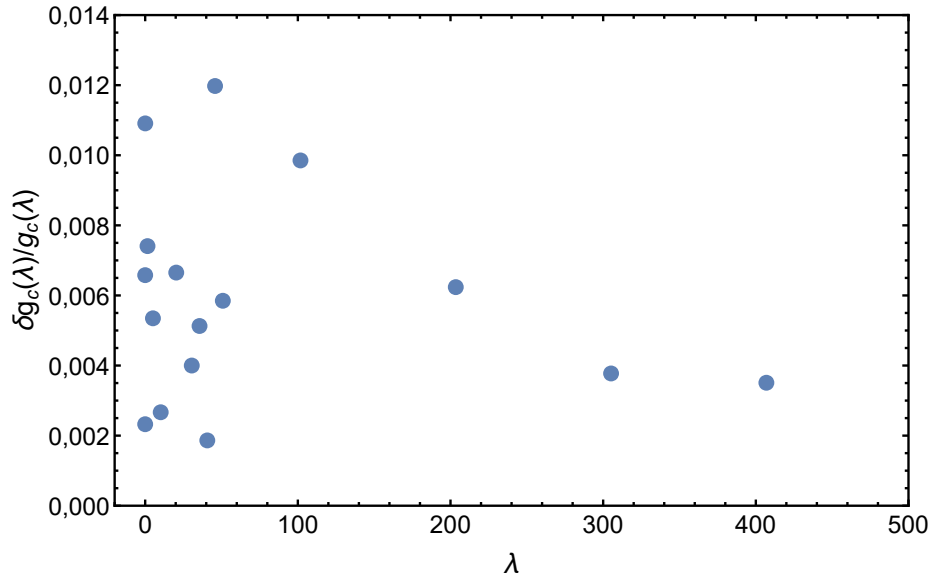
3.7. ábra. A fázishatárt jelentő görbe illesztése különböző közelítések esetén a (3.23) formula alapján. Látható, hogy mind a három közelítés esetén jól működik az illesztés, és a görbe jól reprodukálja az eredményeket a gyenge és az erős csatolások esetében egyaránt.

be. A perturbatív kifejtés a csatolások szerint az alábbi alakot veszi fel:

$$A = A_1\lambda + A_2\lambda^2 + A_3\lambda^3 - A_4g^4 + \dots \quad (3.25)$$

Ez a kifejezés kis λ és g értékekre eltűnik, ha $A_1\lambda \approx A_4g^4 + \mathcal{O}(g^6)$ feltétel teljesül. Annak ellenére, hogy ez az érvelés perturbációs számításon alapul, igaznak bizonyult az erős csatolások esetén is. Az együttthatók a $g_c(\lambda) \sim \lambda^{1/4}$ formulában már függenek a közelítés rendjétől, de az illesztés jól konvergál: az átlagtér és FRG számolások végeredményének hányadosa közelítőleg $\sim 1,45$, az egyhurok és az átlagtér eredményeké pedig csak $\sim 1,04$. Ez azt jelenti, hogy a fázisdiagram számítása során már a kvantumfluktuációk legalacsonyabb rendű figyelembevételének megfelelő egyhurok közelítés is a magas rendű FRG számoláshoz közeli eredményt ad, és jelentős javulást eredményez az átlagtér közelítéshez képest.

A 3.8. ábrán látható, hogy milyen az illesztett görbe viszonya az numerikus adatokhoz. Amint látható, a relatív eltérés a numerikus FRG számolás és az illesztett görbe között 0.2-1.2%, ami vonalszélességen belül egyezik a 3.6. ábrán látható háttérrel. A numerikus FRG számoláshoz elég volt az inverz négyzetgyökös kifejezés másod (ill. harmadrendű) kifejtését használni. Ez alátámasztja az előző eredményt, miszerint a fizikailag releváns tartományban a gyök másod rendig törtéző kifejtése már nagyon jó közelítése az egzakt eredménynek, feltéve, hogy megfelelő kifejtési pontot választunk.



3.8. ábra. Relatív különbség az elsőrendű és másodrendű fázisátalakulást határoló görbe (3.23) egyenlet alapján illesztett alakja és a numerikus FRG számolás eredménye között. A numerikus adatpontok kiszámításához az inverz gyök másod, illetve harmadrendű kifejtését használtam. A megoldás konvergál, a különbség 1.5% alatt van.

3.4. A kvantumkorrekciók hatása a neutroncsillagok tulajdonságaira

3.4.1. A kvantumkorrekciók hatása az állapotegyenletre

A bevezetés 1.1.2. fejezetében leírtaknak megfelelően a neutroncsillagok tömegének és sugarának kiszámításához az (1.29) TOV-egyenleteket kell megoldani. A TOV-egyenletek a neutron csillagot alkotó anyag tulajdonságait az állapotegyenleten keresztül veszik figyelembe, ezért először a Yukawa-modellhez tartozó állapotegyenletet kell meghatározni, hogy a kvantumkorrekciók hatása vizsgálható legyen.

A Yukawa-modellre vonatkozó (2.23) FRG egyenletek, a 2.0.2. fejezetben leírt módon történő megoldása után rendelkezésre áll az effektív potenciál, mint a k skála, a φ mező és μ kémiai potenciál függvénye: $U(k, T = 0, \mu, \varphi)$. Általános esetben az effektív potenciál függvénye az abszolút hőmérsékletnek is, azonban a 2.0.2. fejezetben leírt megoldás során feltettük, hogy $T = 0$, ami jó közelítés a neutroncsillagok hideg maganyagának esetében [50]. A k skála szerinti integrálás a pályaintegrál momentumhőjanként történő elvégzésének felel meg, azaz a skálafüggő effektív potenciál $k = 0$ pontban felvett értéke a teljesen elvégzett pályaintegrálnak felel meg. Emiatt $U(k = 0, T = 0, \mu, \varphi)$ a fizikai effektív potenciál, ami az Ω nagykanonikus potenciál (Landau potenciál) f sűrűségnek felel meg, ha φ a fizikai értékét veszi fel [72], azaz

$$f(T = 0, \mu) = U_k(k = 0, T = 0, \mu, \varphi)|_{\varphi=\varphi_0}, \quad (3.26)$$

ahol φ_0 a skalártér fizikai értéke. Meghatározásához, az $U(k = 0, T = 0, \mu, \varphi)$ potenciál minimumát kell megkeresni a φ változójában, miközben $\mu = \text{konst.}$ A Yukawa-

modell esetén, ha a potenciál szimmetriasértett, azaz $v \neq 0$, ez a minimum $\varphi \neq 0$ helyen van, ezzel ellentétben a szimmetrikus potenciál a $\varphi = 0$ pontban veszi fel a minimumát. Ha a kémiai potenciál adott, akkor az effektív potenciál minimumhelyén felvett értéke nem más, mint a nagykanonikus potenciál értéke az adott kémiai potenciálon. Ezt az összefüggést felhasználva a véges hőmérsékletű térelméleti eredményekből, kiszámolhatók a rendszer termodinamikai állapotváltozói. Figyelembe véve, hogy $T = 0$ az alábbi általános termodinamikai összefüggések használhatók a maganyag nyomásának, energiasűrűségének és sűrűségének meghatározásához:

$$\begin{aligned} p &= -f(T = 0, \mu) \\ n &= -\frac{\partial}{\partial \mu} f(T = 0, \mu) \\ \epsilon &= -p + \mu n, \end{aligned} \tag{3.27}$$

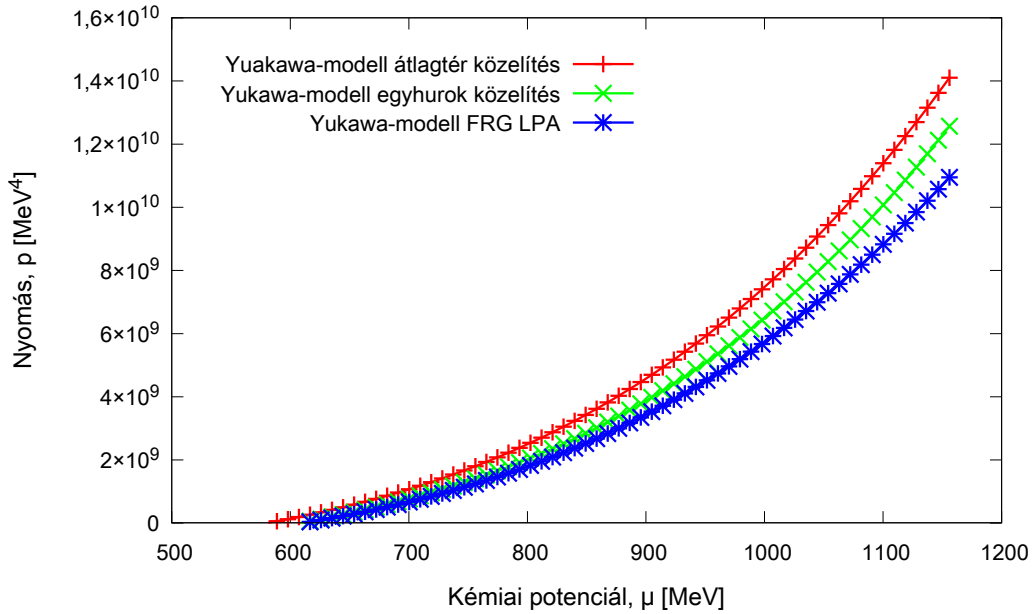
ahol p a maganyag nyomása, n a sűrűsége és ϵ az energiasűrűsége.

Az átlagtér, egyhurok és FRG LPA számítási módszerek esetén az effektív potenciál minimumhelye és értéke változhat, ezért más és más nagykanonikus potenciált kapunk eredményül. Ennek köszönhetően a termodinamikai állapotváltozók értéke, és így az ezekből kiszámított állapotegyenletek is eltérőek lesznek a különböző közelítések esetén.

Meghatároztam a (2.1) effektív hatással adott Yukawa-modellhez tartozó termodinamikai állapotjelzőket különböző kémiai potenciál értékeken $T = 0$ hőmérsékleten az átlagtér, egyhurok és magasabb rendeket tartalmazó FRG közelítés esetében [3]. A nyomást a kémiai potenciál függvényében a (3.9) ábra mutatja a különböző közelítések esetében. Az átlagtér, egyhurok és FRG LPA módszerek alapján kiszámított, összetartozó p és μ párok konzisztens eltérést mutatnak. Tetszőlegesen rögzített kémiai potenciálon, azaz ha $\mu = \mu_0$, az átlagtér közelítéshez tartozó nyomás a legmagasabb, az egyhurok közelítésből kiszámolt valamivel kisebb, és az FRG LPA módszerrel meghatározott érték a legalacsonyabb. A különbség a kémiai potenciál nagyobb értékei felé haladva kissé nő a csatolások gyenge energiafüggése ($\sim \log E$) miatt, aminek pontos alakja függ az alkalmazott közelítéstől. Érdekes megemlíteni, hogy a természetes intuíciónak megfelelően az egyhurok eredmények kisebb eltérést mutatnak a magasabb rendű FRG LPA számolástól, mint az átlagtér közelítéssel kiszámolt értékek, csakúgy mint a modell fázisdiagramjának meghatározása során (lásd a 3.6. ábrát).

Az összetartozó p és μ adatpárokat felhasználva, a (3.27) termodinamikai összefüggések segítségével meghatározható az Yukawa-modellhez tartozó állapotegyenlet. A sűrűség meghatározásához a $p(\mu)$ függvény numerikus deriváltját kell kiszámítani, amit behelyettesítve a (3.27) relációkba az energiasűrűség már egyszerűen kiszámítható. A műveletek elvégzése után rendelkezésre állnak az összetartozó p , μ , ϵ , n értékek, melyekből minden termodinamikai mennyiség meghatározható.

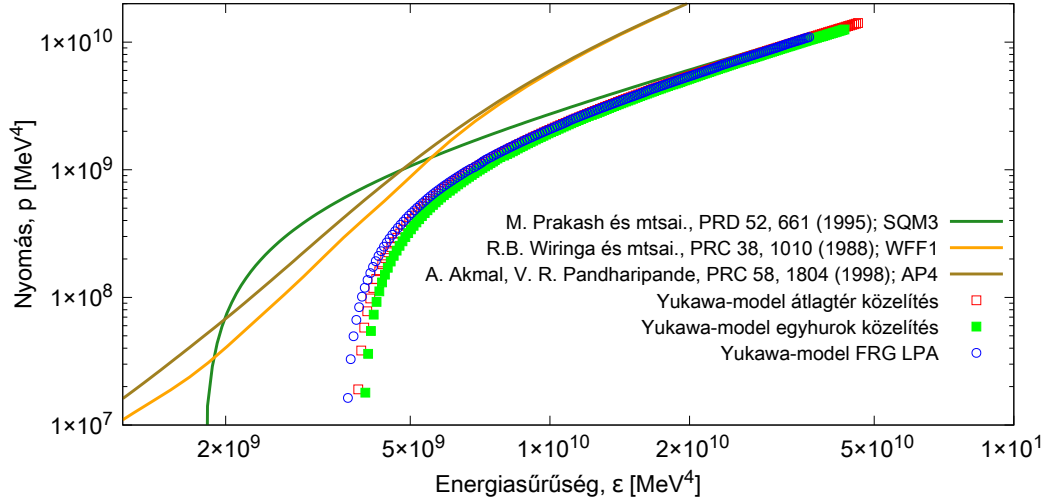
A p és ϵ adatsorok együttes ábrázolása adja az állapotegyenletet a szokásos $p(\epsilon)$



3.9. ábra. A (2.1) effektív hatással adott Yukawa-modellből kiszámított nyomás a kémiai potenciál különböző értékein. A nyomást a 2.0.2. fejezet alapján kiszámított effektív potenciál minimumából határozható meg az átlagtér (piros '+'), egyhurok (zöld 'x') és FRG LPA (kék '*') közelítésben [3].

alakban. A Yukawa-modell állapotegyenlete az átlagtér, egyhurok és FRG LPA közelítésekben a 4.2. ábrán látható. A három különböző közelítéshez tartozó görbe közel halad egymáshoz, azonban alacsonyabb energiasűrűség értékek esetén nagyobb mértékben térnek el egymástól, mint magasabb értékeken. Az is látható, hogy az átlagtér közelítéssel meghatározott görbe közelebb halad a magasabb rendű tagokat tartalmazó FRG LPA számolás eredményéhez, mint az egyhurok közelítéssel meghatározott görbe. Fontos megemlíteni, hogy ez a trend ellentétes a modell fázisdiagramjának meghatározásánál (lásd a 3.6. ábrát) és a $p(\mu)$ függvényénél (lásd a 3.9. ábrát) tapasztaltakkal: ezekben az esetekben az egyhurok számolás eredménye volt közelebb magas rendű FRG LPA számoláshoz. A Yukawa-modell állapotegyenletét összehasonlítottam más, a szakirodalomból vett, elterjedt állapotegyenletekkel is. Annak ellenére, hogy a tárgyalt Yukawa-modell az egyik legegyszerűbb olyan rendszer amin a bozonikus fluktuációk hatása bemutatatható, a realisztikusabb modellekkel nagyságrendileg megegyező eredményeket ad. A Yukawa-modell az SQM3 [53] állapotegyenlethez áll a legközelebb, nagy energiasűrűségekre a két görbe szorosan egymás mellett halad, azonban az alacsony energiás viselkedésük eltér: a Yukawa-modellhez tartozó görbe kétszer magasabb, $\epsilon \approx 4 \cdot 10^9 \text{ MeV}^4$, értéknél hajlik le.

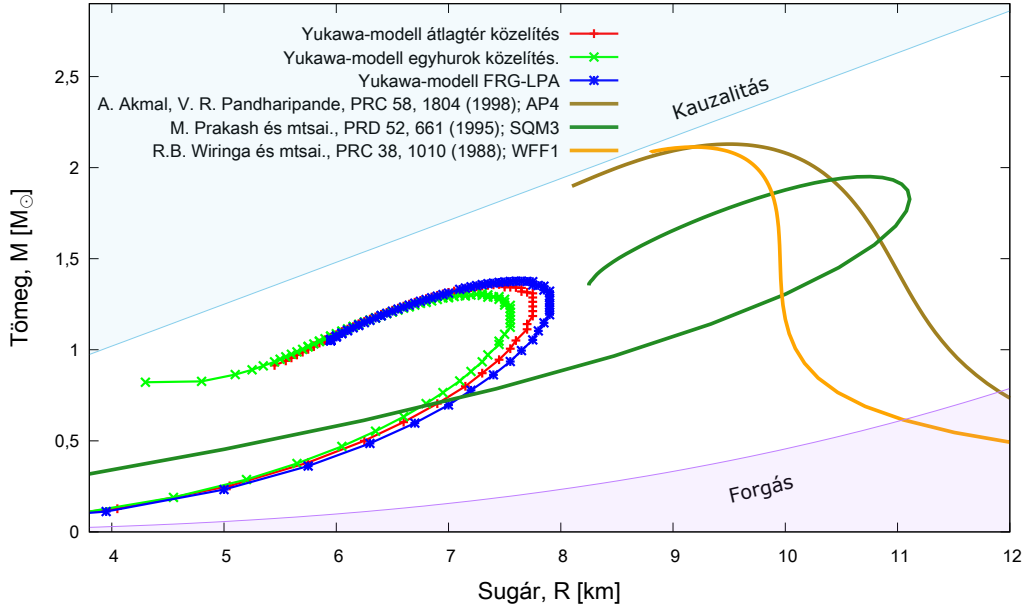
Az állapotegyenletek esetében az egyhurok közelítés nem látszik jobb közelítésnek, mint az átlagtér, ezzel ellentétben azonban a fázisdiagram kiszámításánál szignifikáns javulást eredményez a fluktuációk egyhurok szinten történő figyelembevétele. A fentiek alapján látható, hogy nem nyilvánvaló, hogy az egyhurok közelítés minden esetben jobb, mint az átlagtér közelítés. Érdekes megvizsgálni, hogy a neutroncsillagok jellemzői hogyan változnak, ha a meghatározásukhoz használt állapotegyenleteket különböző közelítésekben számítjuk ki.



3.10. ábra. A (2.1) effektív hatással adott Yukawa-modellhez tartozó állapotegyenlet különböző közelítések esetén. Összehasonlítás céljából az ábrán szerepelnek az irodalomból vett, gyakran alkalmazott állapotegyenletek: AP4 [55], WFF1 [54] és SQM3 [53].

3.4.2. A kvantumkorrekciók hatása a neutroncsillagok megfigyelhető mennyiségeire

Az 1.1.2. fejezetben leírtak szerint a neutroncsillagok tömege és sugara az (1.29) TOV-egyenletek megoldásával határozható meg. A TOV-egyenletek a csillagot alkotó anyagot az állapotegyenlettel veszik figyelembe, a megoldásukhoz szükséges kezdeti feltétel pedig a csillag középpontjában lévő nyomás vagy energiasűrűség. Jelen esetben a Yuakwa-modell állapotegyenletét háromféle közelítésben (átlagtér, egyhurok, FRG LPA) vizsgáljuk, ennek megfelelően, három különböző állapotegyenlet felhasználásával kell megoldani a TOV-egyenleteket is, hogy az eredményül kapott neutroncsillagok sugarát és tömegét összehasonlíthassuk a három közelítés esetében. A csillagok magjában lévő energiasűrűség általában nem ismert, és különböző csillagok esetén változhat, ezért ezt belső paraméterként kezelve, ennek függvényében szokás megadni a lehetséges neutroncsillag konfigurációkat. Az 1.1.2. fejezetben leírtaknak megfelelően, az összetartozó tömeg és sugár értékeket ábrázolva az $M-R$ diagramot kapjuk. A TOV-egyenleteket ilyen módon megoldva a három különböző közelítés esetében a Yukawa-modellhez tartozó $M-R$ diagram három különböző közelítését kapjuk, ez látható a 3.11. ábrán. A Yukawa-modell alapján számolt $M-R$ diagramok mindhárom közelítés esetén a realizisztikusabb modellekkel nagyságrendileg egyező eredményeket adnak. Ez az eredmény nem meglepő, mivel már az állapotegyenletek kiszámításánál is látható volt, hogy a modell nagyságrendileg közel van a viszonyítási alapként használt, szakirodalomból vett állapotegyenletekhez. A 4.2. ábrán látható, hogy a Yukawa-modell állapotegyenlete az SQM3 állapotegyenletéhez halad a legközelebb, és a két függvény alakja is hasonló, bár a görbék alacsony energiás letörési pontjai különbözőek. Ennek megfelelően, ahogy az a 3.11. ábrán látható, az SQM3 modellhez tartozó $M-R$ diagram kvalitatíve megegyezik a vizsgált modellével: mindkét $M-R$



3.11. ábra. A (2.1) effektív hatással megadott Yukawa-modellből számított M - R diagramok az állapotegyenlet különböző közelítései esetén. Összehasonlításként a szakirodalmából vett állapotegyenletekből (AP4 [55], WFF1 [54] és SQM3 [53]) számított M - R diagramok szerepelnek.

diagram a grafikon bal oldala felé hajlik, azaz az általuk leírt kis tömegű csillagok mérete is kicsi, ellentétben az AP4 és WFF1 modellekkel. További hasonlóság, hogy a maximális tömegű csillag elérése előtt mindkét grafikon gyorsan fordul a maximális tömeg felé, kihagyva a például WFF1 modellre jellemző közel függőleges szakaszt, ami megközelítőleg azonos sugarú, de különböző tömegű csillagokat ír le.

Az SQM3 modell M - R diagramjának Yuakwa-moddal történő összehasonlítása különösen hasznos, mivel a két modell legfontosabb alapfeltevései megegyeznek. Amellett, hogy mindkét modell relativisztikus átlagtérelméleti megközelítés, sem a Yuakwa-modell, sem SQM3 nem tartalmazza a neutroncsillagok külső héjának leírását, ahol már nem a hadronok, hanem elsősorban egzotikus magok a legfontosabb szabadsági fokok [53]. Emiatt ezekben a modellekben tisztábban láthatóak a maganyag tulajdonságai, azonban az M - R diagram kis tömegű tartományában nem egyeznek jól a megfigyelésekkel, mert nem tudják a kisebb sűrűségű alacsony tömegű kompakt objektumokat leírni. Emellett mindkét modellben egy fázisátmenet van, a Yuakwa-modellben a hadronok tömeges és tömegtelen fázisa között, míg az SQM3 modellben egy hadronikus és egy kvark fázis között.

A 3.11. ábrán szereplő WFF1 modell a maganyag nem relativisztikus kvantummechanikai leírásán alapszik, a kvantummechanikai soktest probléma megoldásával, speciálisan illesztett potenciálok segítségével veszi figyelembe a nukleon-nukleon kölcsönhatásokat. A modellhez tartozó M - R diagram jól mutatja, hogy milyen különbségek mutatkoznak a relativisztikus átlagtér modellek és a nukleon kölcsönhatásokat illesztett, effektív potenciálokkal figyelembe vevő, nem relativisztikus modellek között. Mindkét esetben kimarad egy fontos komponens: a soktest számolás nem relativisztikus, így valószínűleg nehezebb matematikai kapcsolatot találni az effektív modell

paraméterei és a maganyag elemi leírását adó QCD között. A relativisztikus átlagtér leírás nem tudja figyelembe venni helyesen a magok közötti kölcsönhatásokat kis sűrűségek esetén, ezért az általa leírt neutroncsillagok tömegének csökkenésével nem nő azok sugara a megfigyelésekkel ellentétben.

Az AP4 modell ugyancsak nem relativisztikus kvantummechanikai soktest számításokon alapszik illesztett kölcsönhatási potenciálokkal. A hozzá tartozó M - R diagramot összehasonlítva a WFF1 M - R diagramjával, látható, hogy a hasonló alapelveken alapuló modellek eltérő paraméterezései nagy eltéréseket okozhatnak az M - R görbe menetében. A WFF1 és AP4 modellekhez tartozó M - R diagramok közötti különbség segít kontrasztba helyezni a különböző közelítései által okozott eltéréseket a Yuakwa-modell M - R diagramjain.

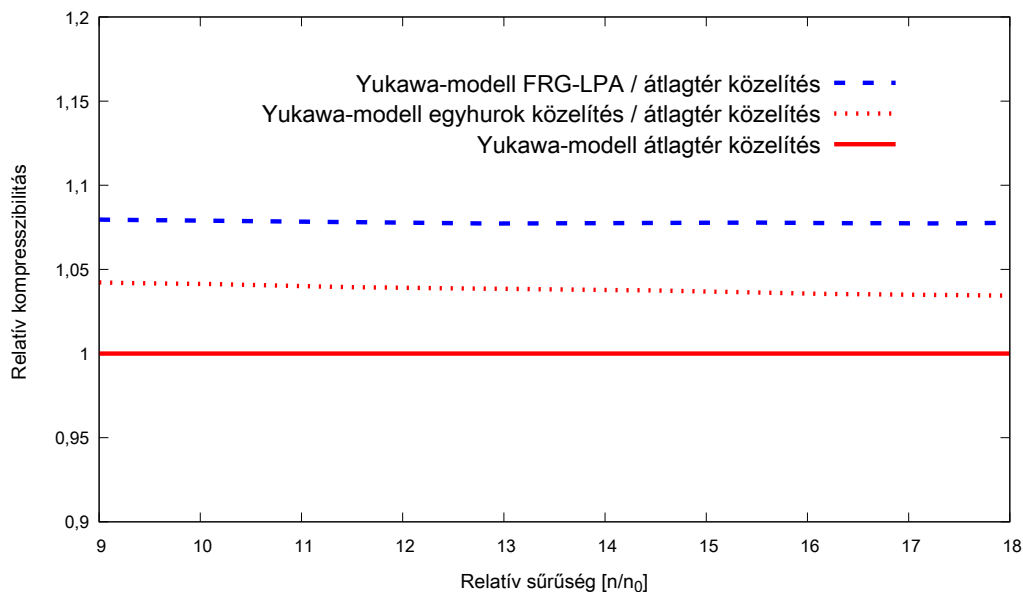
A 3.11. ábrán látható, hogy az egyhurok és átlagtér közelítések eltérő M - R diagramokat adnak az FRG LPA számoláshoz képest. A legnagyobb eltérések a diagram legfontosabb részén találhatók: a görbe visszafordulásánál mindegyik közelítés más maximális sugárú, és más maximális tömegű csillagot jósol. A modell egyik közelítése sem éri el az eddig detektált legnagyobb tömegű neutroncsillagok tömegét (lásd az 1.1.3. fejezetet), ez azonban nem is várható el a modell egyszerűsége miatt. Ami lényeges a grafikonok menetéből az az egymáshoz képesti relatív különbségük.

Az állapotegyenletek esetéhez hasonlóan (4.2. ábra) az átlagtér közelítéssel kapott eredmények közelebb vannak a magasabb rendű FRG LPA számoláshoz, mint az egyhurok közelítéssel kapott eredmények. Ez nem meglepő annak fényében, hogy már az állapotegyenleteknél is ez volt a helyzet, és a TOV-egyenletek csak az állapotegyenleten keresztül tartalmazzák a maganyag jellemzőit. Szintén látható, hogy a kvantumfluktuációk hatása az M - R diagramra nem egyértelmű: az eredményül kapott csillagok tömege és sugara csökkenhet és nőhet is, attól függően, hogy a fluktuációkat hányadik rendűre vettük figyelembe. Az átlagtér megoldást alapul véve, az előforduló maximális csillagtömeget a magasabb rendű korrekciókat is tartalmazó FRG LPA megoldásban közelítőleg 2%-al növeli, míg az egyhurok számolás körülbelül 4%-al csökkenti. A maximális sugár tekintetében hasonló a helyzet: az átlagtér eredményekhez képest az FRG LPA módszerrel kapott maximális sugár mintegy 2%-al nő, míg az egyhurok esetben közelítőleg 3%-al csökken.

A különböző közelítésekhez tartozó állapotegyenletek és M - R diagramok összehasonlítása után úgy tűnhet, hogy mivel az állapotegyenletek kiszámítása során az átlagtér közelítésről kiderült, hogy kisebb eltérést mutat az FRG LPA számolásoktól, mint az egyhurok közelítés eredményei, minden, az állapotegyenletekből származtatott mennyiség esetén is ezt tapasztaljuk majd. Annak belátására, hogy ez nem így, van érdemes megvizsgálni egy másik, kompakt csillagok szempontjából és magfizikai szempontból is fontos, az állapotegyenletből származtatott mennyiséget, a kompresszibilitást. Az 1.1.1. fejezetben bevezetett K kompressziómodulussal a termodinamikai kompresszibilitás az (1.11) alakú kapcsolatban van a szaturációs pontban. A

Yukawa-modell esetén nincs elég paraméter arra, hogy a maganyag szaturációs pontban történő viselkedését reprodukáljuk, azonban a termodinamikai kompresszibilitása kiszámítható. A különböző közelítések közötti relatív eltéréseket vizsgálva képet kaphatunk arról, hogy várhatóan milyen eltéréseket okoz a fluktuációk figyelembevétele a kompressziómodulusban, ami a maganyag összenyomhatóságát jellemzi.

A Yukawa-modellhez tartozó állapotegyenlet három különböző közelítését felhasználva meghatároztam a kompresszibilitást a sűrűség függvényében mindhárom esetben. A könnyebb összehasonlíthatóság kedvéért az eredményeket az átlagközelítéshez viszonyítva mutatja a 3.12. ábra. A kompresszibilitás jó közelítéssel állandó a sűrűség függvényében, így a különböző közelítések relatív különbsége is az. Látható, hogy az állapotegyenletek (4.2. ábra), és az M - R diagram (3.11. ábra) esetével ellentétben az egyhurok közelítés csak mintegy 3–4 %-ban tér el az átlagtér értéktől, míg az FRG LPA számolás 7–8 %-ban. Ez az eredmény óvatosságra int az átlagtér közelítés használatát illetően, nagyobb pontosságú vizsgálatok esetén: előfordulhat, hogy bizonyos körülmények között meglepően jónak bizonyul, azonban ez más esetekben nem garantált.



3.12. ábra. A (2.1) effektív hatással adott Yukawa-modellhez tartozó kompresszibilitás a sűrűség függvényében az állapotegyenlet különböző közelítései esetén.

3.5. A kvantumfluktuációk által okozott korrekciók detektálhatósága

A fentiekben bemutattam a Yukawa-modellen keresztül, hogy a különböző rendű kvantumkorrekciók által okozott korrekciók az állapotegyenletben, milyen mértékben befolyásolják a neutroncsillagok legalapvetőbb mérhető mennyiségeit: a csillag tömegét és a sugarát. Az alábbiakban azt vizsgálom meg, hogy a modern asztrofizikai

megfigyelések képesek-e kimutatni a kvantumos korrekciók által okozott eltéréseket, és így különbséget tenni a számítási módszerek vagy közelítések között.

Az M - R diagram alapvető szerepet tölt be a neutroncsillagok vizsgálatában, azonban a kompakt csillagokkal kapcsolatos mérési kihívások miatt, pontos alakja nem ismert. Ennek legfőbb okai a sugár mérések pontatlansága (lásd az 1.1.3. fejezetet) és a tény, hogy nem állnak egyszerre rendelkezésre ugyanazon kompakt objektumok tömegére és sugarára vonatkozó adatok. Ennek köszönhetően az M - R görbe közvetlen meghatározása helyett, a sugár és tömeg adatok statisztikus elemzéséből meghatározott megengedett tartományok állnak csak rendelkezésre [20].

A fenti okok miatt, a 3.11. ábrán látható M - R diagramok mérésekkel történő közvetlen összehasonlítása nem lehetséges, jelenleg az M - R diagram nem mérhető elég pontosan az 1–4 %-os eltérések detektálásához. Létezik azonban egy másik mennyiség is ami a neutroncsillagok méretét és tömegét jellemzi, és sokkal nagyobb pontossággal mérhető, mint az M - R diagram. Ez a mennyiség a kompaktság, definíciója [82]:

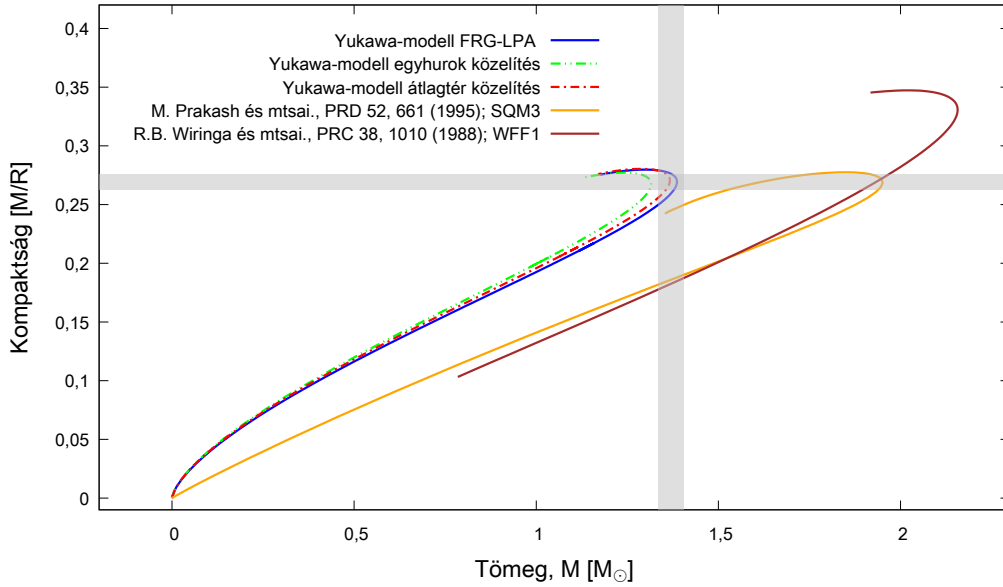
$$C = \frac{2GM}{Rc^2} \xrightarrow{\hbar=c=G=1} C = \frac{M}{R}. \quad (3.28)$$

A közelmúltban, az ISS (International Space Station) nemzetközi űrállomáson üzembe állított NICER berendezés segítségével az eddigieknél nagyobb pontossággal lehetséges a pulzárok kompaktságának meghatározása [19, 83]. A berendezés a pulzárok által kibocsájtott elektromágneses sugárzást a röntgentartományban vizsgálja, és ennek szabályos periodikus változásait kihasználva a kibocsájtó objektumra vonatkozó modellek nagy pontossággal illeszthetők („pulse profile modeling”, azaz pulzárok fénygörbéjének modellezése). Az illesztés pontossága függ a vizsgált rendszer jellemzőitől is, például, hogy a vizsgált rendszer pályasíkja milyen dőlésszögben helyezkedik el, vagy, hogy milyen irányból lát rá a pulzár a detektor. Realisztikusan is előforduló szerencsés esetet feltételezve a pulzár kompaktsága akár 5 % pontosan is meghatározható lehet [83].

A 3.11. ábrán látható adatok alapján meghatároztam a Yuakwa-modell különböző közelítéseihez tartozó kompaktság értékeket. Ez látható a 3.13. ábrán, ahol összehasonlításként szerepelnek az SQM3 és WFF1 modellekhez tartozó görbék is. Az ábrán látható továbbá egy hipotetikus, ideális pulzár megfigyelésen alapuló mérési pont a hibákat mutató sávokkal, hogy a különböző közelítések közötti eltéréseket kontextusba helyezze. Látható, hogy az M - R diagram esetéhez hasonlóan az átlagtér közelítéshez tartozó görbe áll közelebb az FRG LPA eredményhez, míg az egyhurok közelítés adja a legnagyobb eltérést annak ellenére, hogy tartalmaz kvantummechanikai korrekciókat. Ugyancsak igaz, hogy a legnagyobb eltérések a maximális tömegű csillagok esetén jelentkeznek, ami magfizikai szempontból az egyik legfontosabb tartomány [18].

A [83] tanulmány alapján a 3.13. ábrán feltüntettem egy hipotetikus ideális NICER mérés pontosságát. Látható, hogy a mérés érzékenysége közel van ahhoz,

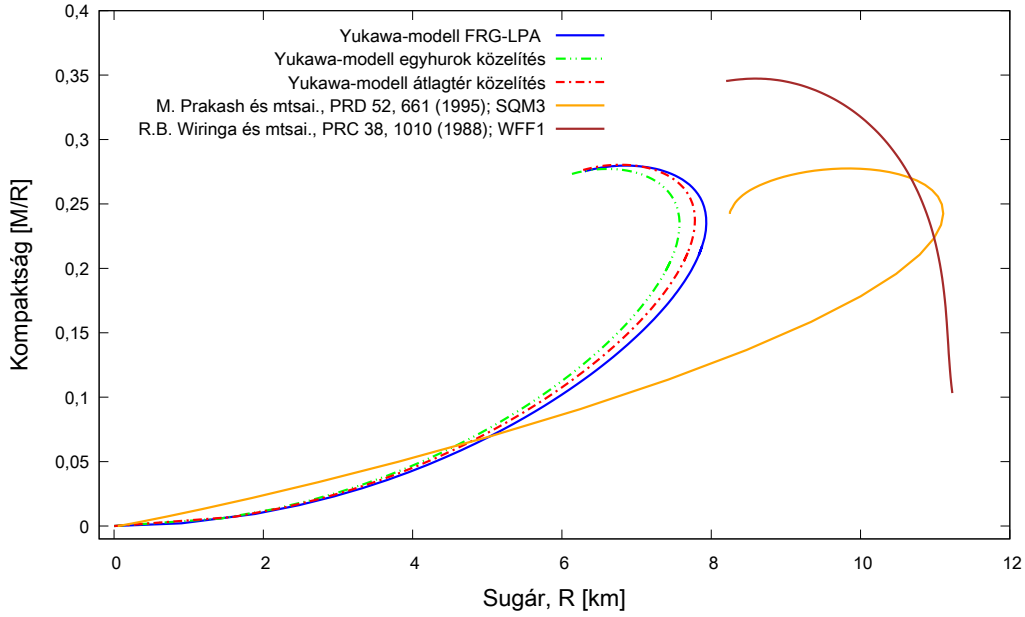
hogy detektálja az egyhurok számolás és az FRG LPA eredmény közti különbséget (ami az előforduló legnagyobb), azonban nem elég ahhoz, hogy különbséget tegyen az átlagtér közelítés és magas rendű FRG számolás között. Ez a tény különös jelentőséggel bír abból a szempontból, hogy e között a két állapotegyenlet között a legnagyobb a különbség fizikai tartalmukat tekintve, hiszen az átlagtér közelítésben egyáltalán nincsenek kvantum korrekciók, míg az FRG számolás igyekszik minél többet figyelembe venni. Ez a bevezetőben említett álarc probléma megjelenése a kompaktság-tömeg ($C-M$) diagramon.



3.13. ábra. A (2.1) effektív hatással adott Yukawa-modellből számított kompaktság értékek a kompakt csillagok tömegének függvényében, az állapotegyenlet különböző közelítései esetén. Összehasonlításként a WFF1 [54] és SQM3 [53] modellekhez tartozó eredmények is szerepelnek. A szürke sávok egy hipotetikus ideális NICER röntgenteleszkópos mérés becsült hibáját mutatják [83].

Hasonló következtetések vonhatóak le a kompaktság sugár ($C-R$) diagramról is, ez látható a 3.14. ábrán. A legnagyobb eltérések a maximális sugarú csillagok estén tapasztalhatóak és az átlagtér eredmények közelebb vannak az FRG LPA számoláshoz, mint az egyhurok korrekciókat tartalmazóak.

A neutroncsillagok kompaktségának mérése lehetséges egy másik módon is, gravitációs hullámok segítségével. A bespirálózó kettősök által kibocsájtott gravitációs hullámok alakja függ a forrásobjektumok kompaktségától. A detektált hullámformákat elemezve lehetséges becslést adni a bespirálkozó objektumok kompaktségára [84]. A számítások során szükség van azonban a kompakt objektumok állapotegyenletére, ami akár 50 %-os bizonytalanságot is okozhat a konkrét eredményekben. 2017-ben detektáltak először bespirálózó neutroncsillag kettősökből származó gravitációs hullámokat [24], így még nem áll rendelkezésre elég statisztika az eredmények pontosítására. A detektált események alacsony száma egyelőre limitálja a módszer használhatóságát, de nem fér hozzá kétség, hogy a jövőben jelentős szerephez jut majd, ezért fontos megemlíteni jelentőségét a kvantumfluktuációk hatásának vizsgálata szempontjából.



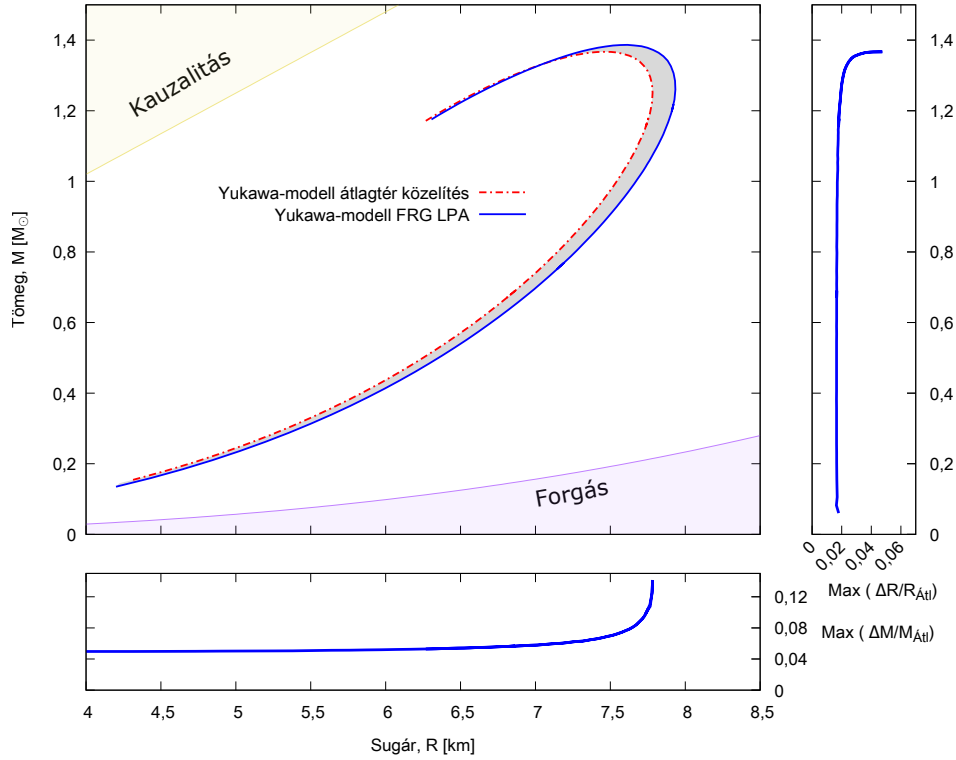
3.14. ábra. A Yukawa-modell ((2.1) egyenlet) különböző közelítéseihez tartozó kompakttság - sugár diagram. Összehasonlításként a WFF1 [54] és SQM3 [53] modellekhez tartozó eredmények szerepelnek.

A tény, hogy a gravitációs hullámokon alapuló vizsgálatok érzékenyek az állapot-egyenletre azt mutatja, hogy az egyre érzékenyebbé váló méréseknek előbb utóbb számolniuk kell majd kvantumfluktuációk által okozott eltérésekkel, melyek az állapotegyenletek esetén akár 5–10 % különbséget is jelenthetnek [3].

Az átlagtér közelítés és a magas rendű FRG számolás között kis különbség mutatkozott a 3.13. ábrán látható kompakttság-tömeg és a 3.11. ábrán bemutatott M - R diagramokon. Mivel ez a két számolás fizikai szempontból nagyon különböző tartalommal bír (hiszen az átlagtér közelítésben nincsenek kvantummechanikai korrekciók) érdemes megvizsgálni, hogy milyen tulajdonságú csillagok esetén várható leghamarabb a két jóslat közötti eltérések detektálása. Ennek megbecsléséhez ad segítséget a 3.15. ábra. Az ábrán látható, hogy adott sugarú és tömegű csillagok esetén, mekkora a relatív különbség (az átlagtér közelítést alapul véve) a klasszikus és kvantummechanikai korrekciókat is tartalmazó számítás között.

Fontos technikai részlet, hogy mivel az M - R diagram nem függvény, hanem egy görbe, így egy adott sugár értékhez két tömeg érték is tartozhat a görbe visszafordulása miatt. Emiatt adott tömeg vagy sugár esetén a különböző közelítésekhez tartozó görbék különbsége nem mindig egyértelmű, attól függően, hogy a görbe melyik részén vizsgálódunk. A 3.15. ábrán emiatt mindig a különböző görbékhez tartozó eltérések maximuma látható a tömeg és a sugár függvényében.

A sugarak relatív különbségét a csillagtömeg függvényében láthatjuk a jobb oldali panelen. Leolvasható, hogy ez a különbség sokáig állandó, megközelítőleg 2 %, és a legnagyobb tömegű csillagok esetén, körülbelül $1,3 M_{\odot}$ naptömegnél, hirtelen megnő körülbelül 5 %-ra. A csillagok tömegére vonatkozó relatív különbség a csillagsugár függvényében látható. Széles tartományon közel konstans mintegy 4 %-os eltérés látható, ami hirtelen, körülbelül 7,8 km-nél felemelkedik 10–12 %-ra. Összefoglalva: a



3.15. ábra. A Yukawa-modellhez ((2.1) egyenlet) tartozó M - R diagramok átlagter közelítésben és az FRG LPA módszerrel kiszámítva. A grafikonok közötti szürke rész a kvantumfluktuációk által okozott eltérés az M - R diagramon. Az FRG és átlagter közelítéssel kiszámolt sugár és tömeg értékek relatív különbsége látható a két kisebb panelen. A jobb oldali panel a két módszerrel kiszámolt sugár relatív különbségét mutatja a csillagok tömegének függvényében. Az alsó panelen a két módszerrel kiszámított csillagtömeg relatív különbsége látható a sugár függvényében.

csillagtömegek esetén a legnagyobb eltérést a legnagyobb sugarú csillagok estén tapasztalható, míg a csillagok sugarának esetében a legnagyobb eltérést a legnagyobb tömegű csillagoknál fordul elő. Ezeket a relatív eltéréseket nem szabad összetéveszteni a maximális csillagtömegek eltéréseivel, melyről a 3.4.2. fejezetben volt szó. Az az M - R görbék maximumának különbségéről jelenti és meghatározásához nem szükséges mérni a csillagok sugarát, nagyságrendje 2–3 %. A 3.15. ábra pontosan arra hívja fel a figyelmet, hogy minél nagyobb pontossággal áll rendelkezésre a kompakt csillagok sugarára vonatkozó információ annál könnyebb lesz detektálni a különböző közelítések közötti különbséget. Ez a javulás a sugár adatok által nyújtott többlet információ segítségével lehetséges és rámutat arra, hogy az egyre pontosabbá váló sugár mérésekkel javulnak az esélyek a kvantumfluktuációk hatásának kimutatására. Általánosan levonható az a következtetés is, hogy a nagy sugarú és tömegű csillagok vizsgálata során jelentkezhetnek először a kvantumfluktuációk okozta különbségek.

A NICER [19] misszió tervei között szerepel ugyanazon neutroncsillagokhoz tartozó tömeg és sugár adatok mérése az eddiginél nagyobb pontossággal. Ennek köszönhetően a nem túl távoli jövőben fontossá válhat a kvantumfluktuációk hatásának figyelembevétele a csillag tömegének és sugarának kiszámításakor, ugyanis ehhez a 3.15. ábra alapján egy elég nagy tömegű csillag estén egy 2–3 %-os pontosságú sugármérés is elég, nincs szükség a teljes M - R diagram ismeretére és nagy számú pontos mérésre.

Egy másik nézőpontból vizsgálva a 3.15. ábrát, az a következtetés is levonható,

hogy a precíziós sugármérések hiányában az adatokat egy átlagtér számoláson alapuló modell is kielégítő pontossággal reprodukálja és ezért elégséges az egyszerűbb radiatív korrekciókat nélkülöző számítási módszereket alkalmazni. Ez az út valóban járható lehet, azonban fontos látni azt is, hogy általában az átlagtér modellek sikeres illesztéséhez szükséges figyelembe venni több korrekciós tényezőt is, melyek a csillag külső héjának leírására, esetleg a csillag dinamikájára vonatkoznak, például a forgás módosító hatására [12]. Ha ezek az egyéb korrekciós tényezők a sugarat és a tömeget 5–10%-ban változtatják meg, akkor már nem jogos elhanyagolni a kvantummechanikai korrekciók szerepét a számolásokban, hiszen a pontosság csak úgy növelhető konzisztens módon, ha minél több azonos nagyságrendű eltérést okozó tényezőt egyszerre veszünk figyelembe. A fentiek mellett a 3.12. ábrán bemutatott jelenséggel is számolni kell, azaz, hogy nem garantált, hogy az átlagtér közelítés minden fizikai mennyiség esetén pontosabb mint az egyhurok. Látható, hogy a kvantumkorrekciók hatásának vizsgálata már a precíziós neutroncsillag mérések előtt jelentős szerepet kaphat a modellalkotás folyamatában, mint a neutroncsillag alaptulajdonságait befolyásoló korrekciós tényező.

3.6. Konklúziók

A 3. fejezetben az álarc probléma egy szokásostól eltérő megjelenési formáját mutattam be a (2.1) egyenlettel definiált Yukawa-modell példáján keresztül: az alapmodellben különbözőféleképpen figyelembe véve a kvantumfluktuációk hatását a hasonló tulajdonságú neutroncsillagokat kapunk. A probléma legélesebb megjelenési formája a 3.11. M - R diagram és a 3.6. fázisdiagram összehasonlításával látható. Az M - R diagramon az átlagtér közelítés viszonylag alacsony hibával ($< 5\%$) reprodukálja a magasabb rendű korrekciókat is tartalmazó FRG LPA számolás eredményét, a maximális csillagtömeg tekintetében az eltérés mintegy 2% . Ezzel ellentétben a fázisdiagramon az átlagtér közelítés és az FRG LPA eredmény között 20 – 30% különbség van. A modell ilyen viselkedése megnehezíti a maganyagra vonatkozó következtetések levonását asztrofizikai megfigyelésekből, hiszen adott mérési pontosság mellett elég lehet átlagtér közelítéssel kiszámítani az M - R diagramot az adatok reprodukálásához, azonban az ilyen illesztésből a fázisdiagramra levont következtetések hibája nagy lehet.

Rámutattam, hogy a kvantumfluktuációk által okozott korrekciókat az eddigi asztrofizikai megfigyelések jelenleg még nem tudják felbontani, azonban a közeljövőben rendelkezésre álló precíziós megfigyelésekre támaszkodó módszerekben szerepet kaphatnak. Bemutattam, hogy a korrekciók kimutathatósága javul, ha a neutroncsillagokra vonatkozó tömeg és sugár adatok egyszerre elérhetőek, ez látható a 3.15. ábrán.

A kvantumfluktuációk által okozott korrekciók nagyságrendje a csillag paramétereit illetően az 5 – 10% , ami modellalkotás szempontjából is jelentős adat. A neutron-

csillagokra vonatkozó különböző eredetű korrekciók konzisztens figyelembevételéhez össze kell vetni az általuk okozott változásokat a kvantumkorrekciók lehetséges hatásával, hiszen ha azok azonos nagyságrendbe esnek jelentős mértékben erősíthetik, vagy gyengíthetik is egymást.

4. fejezet

A maganyag mikroszkópikus paramétereinek hatása a neutroncsillagok tulajdonságaira

A 2. és a 3. fejezetekben az álarc problémát a Yukawa-modell kvantumkorrekcióinak felhasználásával vizsgáltam. A Yukawa-modell paramétereit a levágási skálán rögzített értékek, melyekből kiindulva más és más eredményeket kapunk, ha a kvantumfluktuációk hatását különböző közelítésben vesszük figyelembe. Ebben a fejezetben az álarc problémát egy másik modell segítségével vizsgálom. A Walecka-modell (σ - ω modell) skalár önkölcsönhatási tagokkal kiterjesztett változatában vizsgálom, hogy a modell paramétereinek változtatása hogyan hat a modellből származtatott neutroncsillagok paramétereire. Az elemzés célja, hogy megállapítsam, mely nukleáris paraméterek mennyire befolyásolják a mérhető neutroncsillag-paramétereket. Ezek az ismeretek a modellalkotás során arra használhatóak, hogy egyfajta fontossági sorrendet állítsunk fel a paraméterek között. Meghatározhatjuk, mely mikroszkópikus paramétereket kell pontosan ismernünk egy megbízható illesztéshez, illetve adott mérési pontosság mellett mely paraméterek értéke határozható meg megbízhatóan neutroncsillagokra vonatkozó mérésekből. Az állapotegyenlethez hozzávett egyéb korrekciós tényezők hatásával összehasonlítva az eredményeket, képet kaphatunk arról, hogy adott pontosság mellett milyen tényezőket kell figyelembe vennünk, hogy közelítésünk konzisztens maradjon. Például, az azonos nagyságrendű változásokat okozó korrekciókat egyszerre kell figyelembe venni, mert azok egymás együttes hatását felerősíthetik, vagy nagy mértékben gyengíthetik.

A fentebb leírt vizsgálatot először a szimmetrikus maganyag esetére végeztem el, eredményeimet a 4.1. fejezetben foglalom össze a [6] publikációm alapján. A 4.2. fejezetben a β -egyensúlyt is figyelembe véve a modellben elvégeztem a számításokat az aszimmetrikus maganyag esetére is.

4.1. A szimmetrikus maganyag paramétereinek vizsgálata

A fentebb leírtaknak megfelelően ebben a fejezetben a szimmetrikus módosított σ - ω modellt vizsgálom [6]. Mivel a neutroncsillagokban jelentős neutron túlsúly van, a vizsgálatok fő célja, hogy összehasonlítási alapot szolgáltatson az aszimmetrikus anyagot feltételező számításokhoz [12]. A szimmetrikus és aszimmetrikus számításokhoz tartozó eredményeket összevetve látható, hogy az eredményül kapott összefüggések ténylegesen a maganyag modelljeinek tulajdonságai, és nem a β -egyensúly miatt fellépő effektusok. Mindemellett a szimmetrikus maganyagra vonatkozó számítások elvégzése az első lépés az aszimmetrikus modell felé, mert a minden illesztési paramétert a végtelen szimmetrikus maganyagra vonatkoztatva szokásos meghatározni, hiszen a maganyag szaturációs pontjában definiált nukleáris paraméterek értelmüket veszítik az aszimmetrikus esetben [12].

4.1.1. A kiterjesztett σ - ω modell

A kiterjesztett σ - ω modell az irodalomból jól ismert Walecka-modell [12, 50, 85, 86] skalár önkölcsönhatási tagokkal kiegészített változata. Számításaim során a modell háromféle kiterjesztésével is foglalkoztam, melyek csak a skalár önkölcsönhatás alakjában különböznek. A modellt az alábbi általános Lagrange-függvény adja meg mindhárom esetben:

$$\mathcal{L} = N_f \bar{\Psi} [i\partial - m_N + g_\sigma \sigma - g_\omega \psi] \Psi + \frac{1}{2} \sigma [\partial^2 - m_\sigma^2] \sigma - U_i(\sigma) - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega^2, \quad (4.1)$$

ahol Ψ a nukleonoknak megfelelő fermion-tér, $N_f = 2$ a nukleonok száma, m_N , m_σ , és m_ω rendre a nukleon, σ -mezon, és ω -mezon tömegek, valamint $\omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$. A σ - és ω -mezonok nukleonokkal való kölcsönhatását leíró Yukawa-csatolások rendre g_σ és g_ω . A skalármezon önkölcsönhatási tagjait $U_i(\sigma)$ tag tartalmazza, ami három különböző alakot vehet fel, attól függően, hogy a modell melyik kiterjesztését vizsgáljuk:

$$\begin{aligned} U_3(\sigma) &= h_3 \sigma^3, \\ U_4(\sigma) &= h_4 \sigma^4, \\ U_{34}(\sigma) &= l_3 \sigma^3 + l_4 \sigma^4. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Mivel ebben a fejezetben szimmetrikus maganyagról van szó a rendszer szabad-energiájának meghatározásakor figyelembe kell venni, hogy a protonok n_p és a neutronok n_n sűrűsége megegyezik, ahogy a hozzájuk tartozó μ_p és μ_n kémiai potenciálok értéke is:

$$n_p = n_n \quad \longrightarrow \quad \mu_p = \mu_n = \mu. \quad (4.3)$$

Megoldás átlagtér közelítésben

A (4.1) Lagrange-függvénnyel adott kiterjesztett σ - ω modellt átlagtér közelítésben vizsgáltam. Ekkor a (4.1) egyenletben a kinetikus tagok nem adnak járulékot, és csak egy fermionikus pályaintegrált kell kiszámítani véges hőmérsékleten. Az átlagtér közelítésnek megfelelően a σ skalártér fluktuációit elhanyagoljuk és a skalármezon σ_0 átlagértékével. Az $\omega_{\mu\nu}$ vektormezon térszerű komponensei nem adnak járulékokat az átlagtér közelítésben, ezért csak az időszerű komponensének ω_0 várható értéke marad az egyenletekben [12, 50]. A fentieket figyelembe véve előnyös bevezetni az alábbi jelöléseket:

$$\begin{aligned} x &= g_\sigma \sigma_0, & f_\sigma &= \frac{m_\sigma}{g_\sigma}, \\ y &= g_\omega \omega_0, & f_\omega &= \frac{m_\omega}{g_\omega}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

A fenti jelölések alkalmazásával a (4.1) Lagrange-függvény az alábbi alakot ölti:

$$\mathcal{L} = N_f \bar{\Psi} [i\rlap{\not{D}} - (m_N - x) + (\mu - y)\gamma_0] \psi - \frac{f_\sigma^2}{2} x^2 - U_i(x) + \frac{f_\omega^2}{2} y^2. \quad (4.5)$$

Érdemes továbbá bevezetni az irodalomban megszokott jelöléseket a nukleon effektív tömegre és az effektív kémiai potenciálra:

$$\begin{aligned} m_N^* &= m_N - x, \\ \mu^* &= \mu - y. \end{aligned} \quad (4.6)$$

A σ - ω modell vizsgálatához és az állapotegyenlet felírásához, szükség van a modell által jellemzett fizikai rendszer termodinamikai állapotjelzőinek meghatározására. Legelső lépésként ki kell számítani a rendszer adott kémiai potenciálon vett nyomását a véges hőmérsékletű pályaintegrál elvégzésével. A pályaintegrál a (4.5) Lagrange-függvénnyel felírva az alábbi alakot ölti:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\sigma e^{-\int_{x\mu} U_i(x) + \frac{f_\sigma^2}{2} x^2} \int \mathcal{D}\omega e^{\int_{x\mu} \frac{f_\omega^2}{2} y^2} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{\int_{x\mu} \mathcal{L}_{\text{fermion}}}, \quad (4.7)$$

ahol $\mathcal{L}_{\text{fermion}}$ a (4.5) Lagrange-függvény nukleonterekhez tartozó része. A σ és ω tereket tartalmazó integrálok triviálisak, mert x és y a mezonok σ_0 és ω_0 várható értékét tartalmazzák, amelyek tér- és időfüggetlen mennyiségek. Az ezeket a tagokat tartalmazó téridő integrálok egy konstans mennyiség teljes térre és képzetes időre történő integrálásának felelnek meg, azaz egy $\beta \cdot V$ Wick-forgatott négyestérfogattal való szorzásra egyszerűsödnek. Ez azt is jelenti, hogy a pályaintegrál belsejében csak konstansok szerepelnek, ezért értéke a normálás miatt definíció szerint egységnyi. A fentieket behelyettesítve a (4.7) pályaintegrálba, csak a fermionikus pályaintegrál

elvégezése marad:

$$\mathcal{Z} = e^{\beta V \left(-U_i(x) - \frac{f_\sigma^2}{2} x^2 + \frac{f_\omega^2}{2} y^2 \right)} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{\int d\tau \int dx^3 N_f \bar{\psi} (i\partial - m_N^* + \mu^* \gamma_0) \psi} . \quad (4.8)$$

A (4.8) pályaintegrál véges hőmérsékleten és kémiai potenciálon a fermionikus Matsubara-szumma elvégzésével határozható meg. A (4.6) egyenletnek által definiált változcserének köszönhetően a pályaintegrál alakja, megegyezik a szabad fermion-térre vonatkozó pályaintegrállal, a Matsubara-szumma eredménye a protonnak és neutronnak megfelelő $N_f = 2$ szabadsági fok esetére [50]:

$$\begin{aligned} \ln \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{\int d\tau \int dx^3 N_f \bar{\psi} (i\partial - m_N^* + \mu^* \gamma_0) \psi} = \\ = -4 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[T \ln \left(1 + e^{-\frac{(E_k - \mu^*)}{T}} \right) + T \ln \left(1 + e^{-\frac{(E_k + \mu^*)}{T}} \right) \right] , \end{aligned} \quad (4.9)$$

ahol $T = \beta^{-1}$ az abszolút hőmérséklet, k a fermionok impulzusa, $E_k^2 = k^2 + m_N^{*2}$ pedig a fermionikus szabadsági fokok diszperziós relációja.

A pályaintegrál elvégzése után rendelkezésre áll a \mathcal{Z} állapotösszeg, ami az alábbi kapcsolatban áll az Ω Landau-potenciál f sűrűségével [50]:

$$\mathcal{Z} = \text{Tre}^{-\beta(\mathcal{H} - \mu N)} = e^{-\beta\Omega} = e^{-\beta V f} , \quad (4.10)$$

azaz

$$f = \frac{\Omega}{V} = -\frac{\ln \mathcal{Z}}{\beta V} . \quad (4.11)$$

A Landau-potenciál a Helmholtz- és Gibbs-szabadenergiához hasonló szerepet tölt be termodinamikai szempontból. Számításaim során csak a Landau-potenciál féle szabadenergiát használok, ezért a továbbiakban egyszerűen szabadenergiaként hivatkozom rá. Az állapotösszeg a változók függetlensége miatt három tényezőre szeparálható:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_\sigma \cdot \mathcal{Z}_\omega \cdot \mathcal{Z}_{\text{fermion}} . \quad (4.12)$$

A fentieket összevetve a (4.11) egyenlettel, látható, hogy a szabadenergia három tényező összegeként áll elő: a σ -skalármezón, az ω -vektormezón és a fermionikus nukleonok járulékaiból:

$$\begin{aligned} f = U(x) + \frac{f_\sigma^2}{2} x^2 - \frac{f_\omega^2}{2} y^2 - \\ - 2 \frac{2}{\beta} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\ln \left(1 + e^{-(E_k - \mu^*)\beta} \right) + \ln \left(1 + e^{-(E_k + \mu^*)\beta} \right) \right] . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Az eredeti Walecka-modellhez hasonlóan $T = 0$ abszolút hőmérsékleten kell venni a fermionikus részt [12, 50]. A szabadenergia fermionikus része nulla abszolút hőmér-

sékleten az alábbi alakba írható [50]:

$$f_F = -\frac{2}{8\pi^2} \left[\left(\frac{2}{3} k_F^2 - m_N^{*2} \right) k_F \mu^* + \mu^{*4} \ln \left(\frac{k_F + \mu^*}{\mu^*} \right) \right]. \quad (4.14)$$

A 3.4.1. alfejezetben leírtaknak megfelelően $T = 0$ abszolút hőmérsékleten teljesülnek a (3.27) termodinamikai relációk. Eszerint a kiterjesztett σ - ω modellben a nyomás $p = -f$ módon megkapható a szabadenergia sűrűségéből. Ahogy a szabadenergia mezonokhoz és nukleonokhoz tartozó komponensei szeparálódnak a nyomásnak is van vektormezonokból, skalármezionokból és nukleonokból származó része:

$$p = p_{\text{nukleon}} + p_{\omega \text{ mezon}} + p_{\sigma \text{ mezon}}, \quad (4.15)$$

ahol,

$$\begin{aligned} p_{\text{nukleon}} &= -f_{\text{nukleon}} = \frac{2}{8\pi^2} \left[\left(\frac{2}{3} k_F^2 - m_N^{*2} \right) k_F \mu^* + \mu^{*4} \ln \left(\frac{k_F + \mu^*}{\mu^*} \right) \right], \\ p_{\omega \text{ mezon}} &= -f_{\omega \text{ mezon}} = \frac{f_\omega^2}{2} y^2, \\ p_{\sigma \text{ mezon}} &= -f_{\sigma \text{ mezon}} = -U(x^2) - \frac{f_\sigma^2}{2} x^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

A (3.27) összefüggéseknek megfelelően a nukleonok sűrűsége az alábbi módon számítható ki:

$$n_F = -\frac{\partial f_F}{\partial \mu^*} = \frac{2}{3\pi^2} k_F^3, \quad (4.17)$$

ahol k_F a nukleonok Fermi-momentuma. A (3.27) termodinamikai összefüggések felhasználásával az energiasűrűség értékére adott μ kémiai potenciál mellett az alábbi kifejezés adódik:

$$\epsilon = \frac{f_\sigma^2}{2} x^2 + \frac{f_\omega^2}{2} y^2 + U_i(x) + \frac{2}{8\pi^2} \left[(2k_F^3 + m_N^{*2} k_F) \mu^* - m_N^{*4} \ln \frac{k_F + \mu^*}{m_N^*} \right] \quad (4.18)$$

A nyomás függ a σ - és ω -mezon várható értékétől, azaz meghatározásához szükség x és y értékére. Ehhez szükség van még két független egyenletre, melyek kapcsolatot teremtenek a kémiai potenciál, a nyomás és a mezők várható értéke között. A szabadenergia sűrűségnek, és ezért a nyomásnak is, szélsőértéke van a skalár és vektormezők fizikai értékénél, emiatt az alábbi két szélsőérték feltételnek minden fizikai pontban teljesülnie kell [50]:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x} = f_\sigma^2 x + \frac{\partial U_i(x)}{\partial x} - \frac{\partial p_F(x, y)}{\partial x} = f_\sigma^2 x + \frac{\partial U_i(x)}{\partial x} + \frac{\partial p_F(x, y)}{\partial m_N^*}, \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y} = -f_\omega^2 y - \frac{\partial p_F(x, y)}{\partial y} = -f_\omega^2 y + \frac{\partial p_F(x, y)}{\partial \mu^*}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

A kémiai potenciál értékének rögzítése után a (4.19) szélsőérték-egyenletek megadják x és y értékét. A $\mu^{*2} = k_F^2 + m_N^{*2}$ kifejezés és a (4.16), a (4.18) valamint a (4.17) egyenletek felhasználásával a nyomás, az energiasűrűség és a nukleonsűrűség meghatározható.

Paraméterillesztés a kiterjesztett, szimmetrikus σ - ω modellben

A kiterjesztett σ - ω modellt a (4.2) egyenletnek megfelelő esetekben a maganyag szaturációs sűrűségen meghatározott tulajdonságaira illesztettem, ezzel rögzítve a csatolási állandókat. Az illesztési paraméterekre vonatkozó mérési adatok és azok számítások során felhasznált értékei a bevezető 1.1. táblázatban találhatóak. A 4.1. táblázatban összefoglaltam a σ - ω modell (4.1) Lagrange-függvényében szereplő részecskék tömegeinek értékét és a később tárgyalt, β -egyensúlyt is figyelembe vevő, kiterjesztett σ - ω modellben szereplő részecskék tömegeit is.

paraméter	érték
nukleon tömeg, m_N	938 MeV
σ -mezon tömege, m_σ	550 MeV
ω -mezon tömege, m_ω	783 MeV
ρ -mezon tömege, m_ρ	775 MeV
elektron tömege, m_e	511 keV

4.1. táblázat. A σ - ω modell Lagrange-függvényében szerepelő részecskék tömege [12, 50, 87].

A Landau-tömeg (1.17) definíciója alapján belátható az 1.1.1. alfejezetben leírtak alapján, hogy a σ - ω modell eredeti és kiterjesztett változatában egyaránt igaz, hogy az effektív nukleon tömeg, és a Landau-tömeg nem független egymástól, hanem az alábbi kapcsolatban vannak:

$$m_L = \sqrt{k_F^2 + m^{*2}}, \quad (4.20)$$

ahol $k_F = 259,1$ MeV a nukleonok Fermi-momentuma a (4.17) egyenlet és 1.1. táblázat alapján. A fentiek miatt a Landau-tömeg és az effektív tömeg értéke nem illeszthető egyszerre. Ezt a problémát úgy kezeltem vizsgálataim során, hogy minden esetben két illesztést végeztem el: egyet a Landau-tömeg értékére, egyet pedig az effektív tömegre. Ettől csak azokban az esetekben tértem el mikor a neutroncsillagok megfigyelhető tulajdonságainak érzékenységet vizsgáltam a maganyag mikroszkopikus paramétereire nézve. Ekkor csak a Landau-tömeg értékére illesztett σ - ω modellt használtam, mivel, ahogy azt az alábbiakban bemutatom, az effektív nukleon tömeg 1.1. táblázatban adott értékének felhasználása a modellillesztésben, a megfigyelési adatoktól jelentősen eltérő neutroncsillag-paramétereket eredményez [13, 20, 56].

Az 1.1.1. alfejezet 1.1. táblázata tartalmazza a maganyag szaturációs pontban mért paramétereinek értékét. A nukleon effektív tömegre és a Landau-tömegre a mérés-

sek viszonylag széles tartományt adnak meg, ezért a konkrét számolások elvégzéséhez választani kell egy értéket ezekből a tartományokból. Mivel a vizsgálataim egyik célja, hogy az effektív tömeg különböző értékeire is megvizsgáljam az állapotegyenlet és a belőle származtatott neutroncsillagok tulajdonságait, az 1.1. táblázatban rögzített értékek kiindulási pontként, referenciaként szolgálnak csupán a számításokhoz.

Modern kovariáns sűrűségfukcionálokra alapuló magmodellek a nukleon effektív tömeg értékét a $0,57 m_N - 0,61 m_N$ tartományra teszik [43]. Ezt figyelembe véve az effektív tömeg referenciaértékét $0,6 m_N$ -nek választottam, hogy eredményeim jobban összehasonlíthatóak legyenek a szakterületen eddig született eredményekkel.

A Landau-tömeg illesztett értékül az 1.1. táblázatban található megengedett értékek közül a maximálisat, $0,83 m_N$ -t választottam, ami így limitáló esetként szolgál a Landau-tömeg és az effektív tömeg szempontjából is a kettő közötti (4.20) kapcsolat miatt.

A kiterjesztett σ - ω modell szimmetrikus maganyagot leíró, (4.1) Lagrange-függvénnyel adott változatában a szimmetria energia értéke nem illeszthető, mivel az (1.14) definíció alapján belátható, hogy értéke csak az effektív nukleon tömegtől függ [12]:

$$a_{szim} = \frac{k_F^2}{6\sqrt{k_F^2 + m^{*2}}}. \quad (4.21)$$

A fentieknek megfelelően a szimmetria energia értéke a szimmetrikus σ - ω modellben mindig ugyanaz, függetlenül attól, hogy a (4.2) egyenlettel megadott variánsok közül melyiket használjuk, és csak az effektív nukleon tömeg értékétől függ. A Landau-tömegre illesztett modellek esetében értéke

$$a_{szim} = 14,2 \text{ MeV}. \quad (4.22)$$

Az effektív nukleon tömegre történő illesztés esetén a szimmetria energia értéke

$$a_{szim} = 17,9 \text{ MeV}. \quad (4.23)$$

A kiterjesztett σ - ω modell azon variánsai, melyekben $U_3(\sigma)$ és a $U_4(\sigma)$ típusú skálár önkölcsönhatási tagok vannak, nem tartalmazzak elég szabad paramétert ahhoz, hogy az 1.1. táblázatban szerepelő összes szaturációs paraméter illeszthető legyen. Ezekben az esetekben a fentebb leírtaknak megfelelően két illesztést végeztem el, egyszer a Landau-tömeg értékét rögzítve, majd másodszor az effektív nukleon tömeg értékét felhasználva. A fennmaradó szabad paramétereket mindkét esetben arra használtam, hogy szaturációs sűrűség és a kötési energia értékét az 1.1. táblázatban adott értékeken rögzítsem. A kompressziómodulus és a szimmetria energia értéke ezekben az esetekben a modellek jóslatának tekinthető.

Az $U_{34}(\sigma)$ kölcsönhatási tag esetén, hasonlóan jártam el, azzal a különbséggel, hogy ebben az esetben eggyel több szabad paraméter van, amit a kompressziómo-

dulus 1.1. táblázatban adott értékének rögzítésére használtam fel. Ennél a modellvariánsnál van rá lehetőség, hogy valamilyen értelemben a szimmetrikus maganyag összes, szaturációs pontban mért paraméterét illeszteni lehessen. Szimmetrikus esetben a szimmetria energia járuléka nem jelenik meg, ezért csak a Landau-tömeg és az effektív tömeg közötti kapcsolat okozza a problémát: mivel nem függetlenek, így nem illeszthetők egyszerre. A többi paraméter beállítható az 1.1. táblázatnak megfelelően. Ekkor az effektív tömeg pontos illesztése helyett választható olyan m^* effektív-tömeg érték, ami – figyelembe véve a (4.20) egyenlettel adott kapcsolatot m_L és m^* között – minimalizálja mindkét mennyiség négyzetes eltérést azok 1.1. táblázatban megadott értékeitől. Ennek az optimálisan választott effektív nukleon tömegnek az értéke:

$$m_{opt} = 0,6567 m_N \approx 616 \text{ MeV} . \quad (4.24)$$

A paraméterek illesztésének menete kissé eltér az eredeti σ - ω modell estétől [12]. A kiterjesztett modellben van elég szabad paraméter a nukleon effektív tömeg illesztéséhez, míg az eredeti modellben nincs, ezért eggyel több lépésből áll a számítás. Ezen felül az $U_{34}(\sigma)$ típus kölcsönhatási taggal történő kiterjesztés esetén a kompressziómodulus értékét is illeszteni kell, ami még egy újabb lépést jelent. A fenti különbségek miatt az alábbiakban bemutatom a modell illesztésének főbb lépéseit.

Paraméterillesztés $U_3(\sigma)$ és $U_4(\sigma)$ kölcsönhatási tagok esetén

A (4.19) szélsőérték egyenletekben a nukleonok nyomásának effektív tömeg szerint vett deriváltja, a skalársűrűség, alábbi módon írható [50]:

$$n_s = -\frac{\partial p}{\partial m_N^*} = \frac{m_N^*}{\pi^2} \left[k_F \mu^* - (m_N^*)^2 \ln \left(\frac{k_F + \mu^*}{m_N^*} \right) \right] . \quad (4.25)$$

A nukleonok nyomásának y -szerint és a így μ^* effektív kémiai potenciál szerint vett deriváltja a (4.17) egyenletnek megfelelően maga a nukleonok sűrűsége. A fentieket felhasználva az y -ra vonatkozó szélsőértékegyenlet az alábbi alakba írható:

$$y = \frac{1}{f_\omega^2} n_F = \frac{1}{f_\omega^2} \frac{2}{3\pi^2} k_F^3 . \quad (4.26)$$

Az illesztés során a fermionok sűrűségét azonosítjuk a maganyag sűrűségével a szaturációs pontban: $n_F = n_0$. Az összefüggés felhasználásával egy egyenletet kapunk y és k_F szaturációs pontban felvett y_c és k_{Fc} értékének meghatározására. Az eredmény:

$$y_c = \frac{n_0}{f_\omega^2} \quad (4.27)$$

$$k_{Fc} = \sqrt[3]{\frac{3\pi^2 n_0}{2}}$$

A fentiek alapján k_{Fc} azonnal meghatározható, ha n_0 adott, y_c azonban még függ az ismeretlen f_ω értékétől. Ezek meghatározásához szükség van még egy összefüggésre a paraméterek között. A bevezetésben említett (1.6) egyenlet alapján, a szaturációs pontban teljesül, hogy:

$$0 = \mu_c n_0 - \epsilon_0. \quad (4.28)$$

Felhasználva a kötési energia (1.4) definícióját az alábbi egyenlet adódik a kémiai potenciál értékére a szaturációs pontban:

$$\mu_c = m_N + B. \quad (4.29)$$

A B kötési energia értéke itt lép be a számításokba. A (4.8) pályaintegrál alapján meghatározott fermionikus diszperziós reláció $T = 0$ abszolút hőmérsékleten az alábbi alakot ölti:

$$\mu^{*2} = k_F^2 + m_N^{*2}. \quad (4.30)$$

A fenti kifejezésbe behelyettesítve a változók szaturációs pontban felvett, fentebb kiszámított értékét, valamint az effektív tömeg illesztendő értékét, az alábbi egyenlet adódik y_c -re:

$$\mu_c^{*2} = (\mu_c - y_c)^2 = (m_N + B - y_c)^2 = k_{Fc}^2 + m_N^{*2}. \quad (4.31)$$

A fenti egyenletből kiszámított y_c értékét behelyettesítve a (4.27) egyenletbe f_ω rögtön adódik.

Az x változó szaturációs pontban felvett x_c értékének meghatározásához és az effektív nukleon tömeg illesztéséhez szükség van az effektív nukleon tömeg értékére a szaturációs pontban, amit az alábbi egyenletbe helyettesítve x_c értéke rögtön adódik:

$$m_N^* = m_N - x_c. \quad (4.32)$$

A Landau-tömeg illesztése hasonlóan történik, csak a fenti egyenlet helyett a Landau-tömeg definiáló egyenletét kell megoldani x_c -re:

$$m_L^2 = k_{Fc}^2 + (m_N - x_c)^2. \quad (4.33)$$

A σ skalártérre vonatkozó csatolások meghatározásához szükség van az x változóra vonatkozó szélsőértékegyenletre, ami az alábbi alakba írható:

$$f_\sigma^2 x_c + \left. \frac{\partial U_i(x)}{\partial x} \right|_{x=x_c} = n_s(k_{Fc}, m_N^*, \mu_c^*) = n_{sc}, \quad (4.34)$$

ahol bevezettem az n_{sc} jelölést a (4.25) egyenlettel adott skalársűrűség szaturációs pontban felvett értékére. A két ismeretlen csatolás meghatározásához, két egyenletre van szükség. A második egyenlet abból a feltételből adódik, hogy a szaturációs

pontban a maganyag nyomása eltűnik, $p = 0$. A maganyag nyomása a szaturációs pontban a (4.16) egyenlet alapján az alábbi módon írható:

$$0 = p = \frac{f_\omega^2}{2} y_c^2 + p_{\text{nukleon}}(m_N^*, \mu_c^*) - \frac{f_\sigma^2}{2} x_c^2 - U_i(x_c) \quad (4.35)$$

A (4.34) és a (4.35) két független egyenlet, melyekben minden mennyiség adott, kivéve f_σ -t és az U_i kölcsönhatási tagban lévő csatolást. A két egyenletet megoldva a fenti két ismeretlenre a modell minden paramétere kiszámítható lesz.

Paraméterillesztés $U_{34}(\sigma)$ kölcsönhatási tag esetén Ha a kiterjesztett σ - ω modellben az $U_{34}(\sigma)$ típusú kölcsönhatási tagot használjuk, lehetőség van a kompressziómodulus illesztésére. Az $U_3(\sigma)$ és $U_4(\sigma)$ típusú modellek esetére fentebb levezetett eljárás az utolsó lépés kivételével működik az $U_{34}(\sigma)$ estében is. Az $U_{34}(\sigma)$ kölcsönhatási tag átlagtér közelítésben a (4.4) egyenletnek megfelelő $\sigma_0 \rightarrow x$ változócsere után az alábbi alakot ölti:

$$U_{34}(x) = \lambda_3 x^3 + \lambda_4 x^4. \quad (4.36)$$

Az $U_{34}(x)$ kölcsönhatási tagban lévő csatolások az alábbi kapcsolatban vannak a változócsere előtti csatolásokkal:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{l_3}{g_\sigma^3}, \\ \lambda_4 &= \frac{l_4}{g_\sigma^4}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

A (4.34) és a (4.35) egyenletekben ekkor három független ismeretlen van: f_σ és az $U_{34}(x)$ -ben lévő harmadfokú kölcsönhatási tag λ_3 csatolása, illetve a negyedfokú kölcsönhatási tag λ_4 csatolása. Az egyenletrendszer az f_σ^2 , a λ_3 és a λ_4 változóknál lineáris, ennek kihangsúlyozására érdemes a (4.34) és a (4.35) egyenleteket az alábbi alakban írni:

$$\begin{aligned} 0 &= -f_\sigma^2 x_c^2 - 2\lambda_3 x_c^3 - 2\lambda_4 x_c^4 + 2R \\ 0 &= -f_\sigma^2 x_c^2 - 3\lambda_3 x_c^3 - 4\lambda_4 x_c^4 + n_{sc} x_c, \end{aligned} \quad (4.38)$$

ahol

$$R = \frac{1}{2} f_\omega^2 y_c^2 + p_{\text{nukleon}}(m_N^*, \mu_c^*). \quad (4.39)$$

A (4.38) egyenletrendszer megoldása az alábbi alakban írható:

$$\begin{aligned} f_\sigma^2 &= 2x_c^2 \cdot \lambda_4 + \frac{6R - 2n_{sc} x_c}{x_c^2} \\ \lambda_3 &= 2x_c \cdot \lambda_4 + \frac{n_{sc} x_c - 2R}{x_c^3}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

A megoldás a λ_4 csatolás értéktől függ, ezért ennek ismeretében a (4.40) egyenletek

alapján a másik két csatolás már kiszámítható. A λ_4 csatolás értékének rögzítéséhez a kompressziómodulust használtam, az alábbi módon. Kis lépésenként változtatva a λ_4 paramétert annak minden értékére elvégeztem a kiterjesztett σ - ω modell paramétereinek illesztését. Az így kapott modellek energiasűrűségét és nyomását meghatároztam a (4.18) és a (4.16) egyenletek alkalmazva, és az 1.1.1. alfejezet (1.9) egyenlete alapján kiszámítottam a λ_4 különböző illesztéseihez tartozó modellek kompressziómodulusát. Ezt az eljárást egyre finomabb $\Delta\lambda_4$ lépésközzel elvégezve a kompressziómodulus 1.1. táblázatban adott értékét reprodukáló λ_4 tetszőleges pontossággal meghatározható.

A fentiek alapján látható, hogy kompressziómodulus értéke más lesz a Walecka-modell különböző kiterjesztési esetén a különböző önkölcsönhatási tagoknak köszönhetően. Az eredményül kapott értékeket a 4.2. táblázatban foglaltam össze. Az $U_3(\sigma)$ és $U_4(\sigma)$ kölcsönhatási tagoknak megfelelő esetekben nincs elég paraméter ahhoz, hogy az 1.1. táblázat összes értékét reprodukálni lehessen, így itt a kompressziómodulus értéke függ attól, hogy a modellt az effektív tömeg vagy a Landau-tömeg értékével paraméterezik. Ezzel szemben a $U_{34}(\sigma)$ kölcsönhatási tag használata esetén minden paraméter illeszthető, így az effektív tömeg értékétől függetlenül mindig ugyanannyi a kompressziómodulus értéke.

A 4.2. táblázatból leolvasható, hogy az $U_3(\sigma)$ típusú modell Landau-tömegre történő illesztésével kapott kompressziómodulus értéke nagyon közel van az irodalmi értékhez, így ez a modell variáns a legprediktívebb, ugyanis bár a $U_{34}(\sigma)$ típusú modell minden szaturációs sűrűségen vett paramétert reprodukál, ezt azonban illesztés útján valósul meg, míg a fentebb említett modellekből a korrekt érték azonnal adódik.

Modell	illesztés	K [MeV]
σ - ω modell	az eredeti modell	563
$U_3(\sigma)$	effektív nukleon tömeg	437
$U_3(\sigma)$	Landau-tömeg	247
$U_4(\sigma)$	effektív nukleon tömeg	482
$U_4(\sigma)$	Landau-tömeg	334
$U_{34}(\sigma)$	minden illesztés	240

4.2. táblázat. A (4.2) egyenletekkel adott modell variánsokból adódó kompressziómodulus értékek a Landau-tömeg, illetve az effektív tömeg 1.1. táblázatban adott értékére történő illesztés esetén. Az $U_{34}(\sigma)$ típusú modellben minden szaturációs paraméter függetlenül illeszthető, ezért a kompressziómodulus értéke nem függ az illesztés típusától.

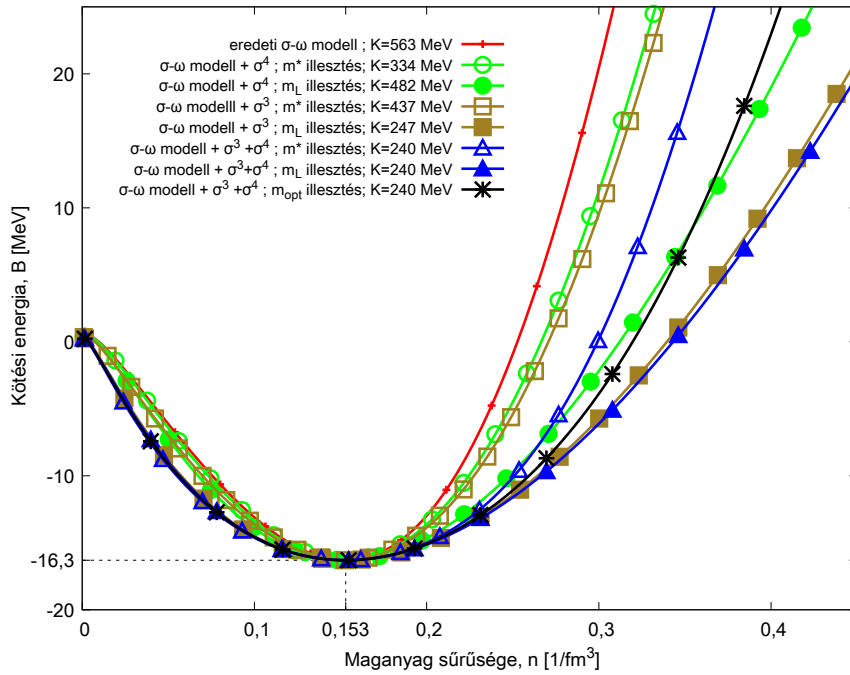
A maganyag jellemzői a kiterjesztett σ - ω modellben

A fentieknek megfelelően illesztett paramétereket felhasználva kiszámítottam a p nyomást és az ϵ energiasűrűséget a maganyag n sűrűségének függvényében a (4.2) definíciókkal adott modell variánsok esetében. Ellenőrzés céljából először a kötési energiát határoztam meg a maganyag sűrűségének függvényében. A bevezető 1.1.1. alfejezetében leírtaknak megfelelően, ez az energiasűrűség és a nukleonsűrűség felhasználásával

az alábbi módon adható meg:

$$B(n) = \frac{\epsilon(n)}{n} - m_N, \quad (4.41)$$

ahol m_N a szabad nukleonok tömege. Az eredmény a 4.1. ábrán látható. A várakozásoknak megfelelően [12] a kötési energia minimuma minden esetben a szaturációs sűrűségnél található, és a szaturációs pont közelében a $B(n)$ kötési energia függvény második deriváltjával kapcsolatban álló kompressziómodulus befolyásolja a görbék viselkedését.



4.1. ábra. A kötési energia a maganyag sűrűségének függvényében, a (4.2) definíciókkal adott modellvariánsok esetén, az effektív nukleon tömeg különböző értékeinek megfelelő illesztésekre. Az üres szimbólumok az effektív tömegre, a kitöltöttek pedig a Landau-tömegre illesztett modellekhez tartoznak. Az illesztési paraméterek megtalálhatóak az 1.1. táblázatban. Összehasonlításképpen az eredeti σ - ω modellből kiszámolt piros görbe látható.

Minél nagyobb a kompressziómodulus értéke annál meredekebben emelkedik a kötési energia a nukleon sűrűség függvényében. A 4.1. ábra alaposabb megfigyelése után azonban látható, hogy a fenti viselkedést szigorúan véve csak az azonos effektív nukleon tömeg (Landau-tömeg) értékekre illesztett modellek kötési energiáira valósul meg. A Landau-tömegre illesztett modellek görbéit kitöltött szimbólumokkal jelöltem, míg az ugyanazon modell effektív tömegre illesztett változatát ugyanannak a szimbólumnak az üres változatával. Az azonos típusú (kitöltött vagy üres) szimbólummal jelölt görbék között teljesül, hogy a nagyobb kompressziómodulus esetén a görbe meredekebben emelkedik. A fentiek együtt arra engednek következtetni, hogy a nukleon effektív tömeg, és a (4.20) képlet miatt a vele egyértelmű kapcsolatban lévő Landau-tömeg, nagymértékben befolyásolja az energiasűrűséget. Ezt a feltevést támasztja alá az is, hogy a $B(n)$ görbék effektív nukleon tömeg szerinti elkülönülése

a $0,3 - 0,4 \text{ fm}^{-3}$ nukleonsűrűség tartományon még nyilvánvalóbb: a Landau-tömegre illesztett modellek (kitöltött szimbólumok) és az effektív tömegre illesztettek (üres szimbólumok) elkülönülni látszanak egymástól. Az üres kék háromszöggel jelölt görbe még „helyet is cserél” a teli zöld körhöz tartozó görbével a sűrűség $0,28 \text{ fm}^{-3}$ értékénél. Ezután minden effektív tömegre illesztett modell kötési energia görbéje (üres szimbólumok) magasabban halad mint a Landau-tömegre illesztett (kitöltött szimbólumok) modellek görbéi. A fekete csillaggal ('*') jelölt optimális effektív tömegre illesztett modell (lásd fentebb a (4.24) egyenletet) a kitöltött és üres szimbólumokkal jelölt görbék között halad, ami még jobban alátámasztja azt a feltételezést, hogy a szaturációs ponttól távolodva az energiasűrűsége (és a kötési energiát) a nukleon effektív tömeg nagy mértékben befolyásolja. A 4.1. ábra szaturációs sűrűségnél kisebb sűrűségű tartományában nem tapasztalható a görbék fentebb említett elkülönülése, közel haladnak egymáshoz és kis eltéréseket mutatnak. Megjegyzendő, hogy a görbék ezen tartománya szigorúan véve már nem fizikai, hiszen az effektív magmodellektől nem várható el, hogy ilyen kis sűrűségű anyag viselkedését leírja.

Az is látható a 4.1. ábrán, hogy az eredeti σ - ω modell esetéhez képest (azaz, ha $U_i(\sigma) = 0$ a (4.1) Lagrange-függvényben) a skalár önkölcsönhatási tagok hozzávétele a modellhez „lágýítja” az állapotegyenletet, vagyis kisebb és realisztikusabb kompressziómodulus értékeket kapunk. Ez az $U_3(\sigma)$ és $U_4(\sigma)$ típusú kölcsönhatási tagok esetén is igaz, melyeknél a fentebb leírtaknak megfelelően a kompressziómodulus nem illesztett paraméter.

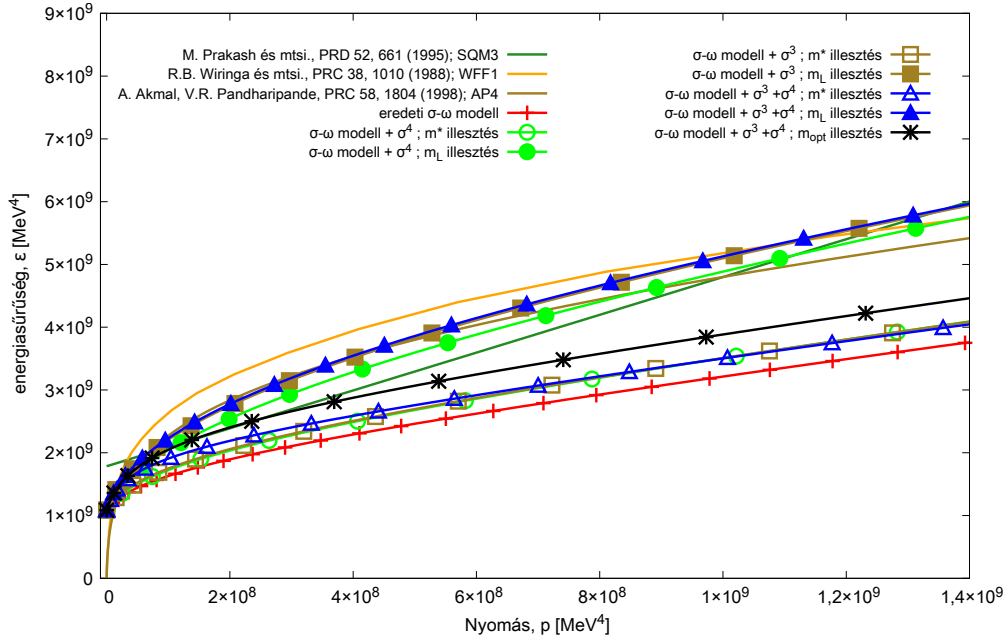
A fentiknek megfelelően minden a (4.2) definíciónak megfelelő modell variáns esetén rendelkezésre áll a nyomás és az energiasűrűség a nukleonsűrűség függvényében. Az energiasűrűséget a nyomás függvényében ábrázolva az állapotegyenletet kapjuk 1.1.2. fejezetben leírtaknak megfelelően. Az eredmények a 4.2. ábrán láthatóak. A 4.1. ábrához hasonló viselkedést mutatnak a görbék: a modell típustól viszonylag független módon az állapotegyenletek az illesztett effektív tömeg értékének megfelelő sávokba rendeződnek. Az effektív tömeg értékére illesztett állapotegyenletek egymáshoz közel haladnak (üres szimbólumok), csakúgy mint a Landau-tömeg értékére illesztett modellek (kitöltött szimbólumok). Adott nyomáson minden Landau-tömegre illesztett modell variáns energiasűrűsége nagyobb, mint a nukleon effektív tömegre illesztetteké. Egy adott sávon belül természetesen a különböző modellvariánsokhoz tartozó állapotegyenletek kissé eltérnek egymástól, de az optimális effektív tömegre illesztett modell és az eredeti Walecka-modell állapotegyenletével való összehasonlítás tovább erősíti a feltételezést, miszerint az effektív tömeg eltérő értéke okozza a legnagyobb különbséget az állapotegyenletekben. Ehhez csak össze kell hasonlítani az $U_{34}(\sigma)$ típusú modell variáns háromféle illesztését.

Az állapotegyenletek minden pontjában igaz, hogy adott nyomáson az effektív tömegre illesztett változata (üres kék háromszög) kisebb energiasűrűséget ad, mint a Landau-tömegre illesztett változat (kék kitöltött háromszög). Ha igaz a feltételezés,

miszerint azt várjuk, hogy az effektív tömeg értékének megfelelően rendeződnek el az állapotegyenletek, akkor a (4.24) egyenlettel adott optimális tömegre illesztett modell variáns állapotegyenlete a Landau-tömegre és az effektív tömegre illesztett között kell, hogy haladjon. Valóban ez is történik, a fekete csillaggal jelölt állapotegyenlet a másik kettő között halad a nyomás minden értékére, annak megfelelően, hogy az optimális tömeg az illesztett Landau-tömegnek megfelelő, (4.20) egyenlettel adott effektív tömeg érték, és az effektív tömeg illesztett értéke között van:

$$m_L = 0,83 m_N \rightarrow m_L^* = 0,78 m_N > m_{opt} = 0,6567 m_N > m^* = 0,6 m_N \quad (4.42)$$

A 4.2. ábra egy másik fontos tulajdonságra is rámutat. A 4.1. ábrán tapasztaltakkal ellentétben itt nem érvényesül a kompressziómodulus rendező hatása. Ez könnyen látható, ha megnézzük a már fentebb is említett $U_{34}(\sigma)$ skalár önkölcsönhatási taggal kiegészített modellhez tartozó állapotegyenleteket. Fentebb láttuk, hogy ezek az effektív tömegnek megfelelően rendeződnek el, pedig a modellvariáns minden illesztéséhez pontosan ugyanakkora kompressziómodulus tartozik, a 4.2. táblázatnak megfelelően. Különböző modellvariánsokra vonatkozó példa is könnyen hozható: az effektív tömegre illesztett $U_3(\sigma)$ típusú modell (üres barna négyzet) kompressziómodulusa $K = 247$ MeV, míg az $U_4(\sigma)$ típusú modellé (üres zöld kör) $K = 482$ MeV, ennek ellenére a két modellhez tartozó állapotegyenletek a nyomás széles tartományán egymáshoz közel haladnak, a köztük lévő különbség a nyomás nagyobb értékre egyre kisebb.



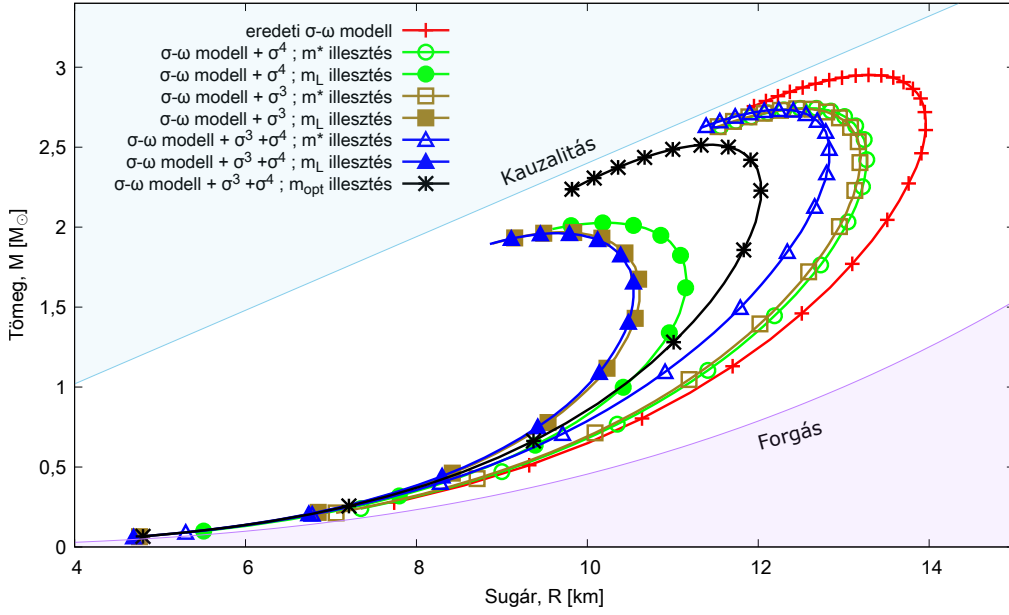
4.2. ábra. A (4.2) definícióknak megfelelő modell variánsokhoz tartozó állapotegyenletek az effektív nukleon tömeg különböző értékeinek megfelelő illesztésekre. Az illesztési paraméterek értéke az 1.1. táblázatban található. Az üres szimbólumok az effektív tömegre, a kitöltöttek pedig a Landau-tömegre illesztett modellekhez tartoznak. Összehasonlításként az eredeti σ - ω modell szerepel (piros '+') és feltüntettem a szakirodalomban elterjedt SQM3 [53], WFF1 [54] és AP4 [55] modellekhez tartozó állapotegyenleteket is.

4.1.2. Neutroncsillagok tulajdonságai a kiterjesztett σ - ω modellben szimmetrikus maganyag esetén

A σ - ω modell fentebb bevezetett, különböző típusú kiterjesztéseihez tartozó állapotegyenleteket felhasználva az (1.29) TOV-egyenletekben, az (1.1.2) fejezetben leírtaknak megfelelően kiszámíthatóak a különböző modellvariánsok által jósolt M - R diagramok. Mivel a neutroncsillagokban jelentős a neutrontöbblet, a TOV-egyenletek szimmetrikus maganyagra vonatkozó megoldásával első sorban nem a neutroncsillagok realisztikus modellezése a cél [12, 13, 28, 58]. Ezek a számítások referenciaként szolgálnak a modellek aszimmetrikus változatával elkészített számolásokhoz: így megbecsülhető az asszimmetria energia hatása a neutroncsillagok paramétereire, és az eredmények összehasonlításával vizsgálhatóak a β -egyensúly által okozott effektusok.

Ezek a referenciaként szolgáló számítások az álarc probléma vizsgálatában játszanak központi szerepet. A kihívás az, hogy különböző állapotegyenletek nagyon hasonló neutroncsillag-paraméterekhez vezetnek. Ez csak úgy fordulhat elő, hogyha a fizikai magmodellekben lévő bizonyos információk nem bírnak nagy jelentőséggel a TOV-egyenletek megoldására nézve, vagy több effektus összjátékának köszönhetően hatásuk nem jelenik meg. A megoldás érzéketlensége bizonyos mikroszkópikus paraméterekre nehézkessé teszi a magfizikai információk kinyerését a neutroncsillagok megfigyelt tulajdonságaiból. Az álarc probléma szempontjából a TOV-egyenlet megoldása tekinthető egyfajta leképezésnek az állapotegyenletről az M - R diagramra. A számítások elvégzésével szimmetrikus és aszimmetrikus esetben ennek a leképezésnek a viselkedését vizsgálhatjuk arra nézve, hogy mennyire érzékeny az M - R diagram a β -egyensúlyban lévő anyag tulajdonságaira nézve.

A neutroncsillagok viselkedését elsősorban az állapotegyenlet nagy sűrűségű része határozza meg, mert a kompakt csillagokban a sűrűség és nyomás a középponttól kifelé haladva lassan csökken, majd a külső héjon áthaladva hirtelen nagyot esik [12, 13, 28]. Emiatt az várható, hogy az állapotegyenletek fentebb felvázolt tulajdonságai érvényesülnek a modellekből származtatott neutroncsillagok M - R diagramján is. A TOV-egyenleteket megoldva a fentebb említett modellek és illesztéseik esetében a 4.3. ábrán látható M - R diagramok adódnak. A 4.3. ábrán látható diagramok hasonló tulajdonságokat mutatnak, mint a 4.2. ábrán lévő állapotegyenletek. A görbék az effektív nukleon tömeg illesztett értékének megfelelően helyezkednek el egymáshoz képest, ahogy az állapotegyenletek esetén is. Az egyes modellvariánsok között természetesen tapasztalható különbség, de az $U_{34}(\sigma)$ kölcsönhatási taggal rendelkező modell különböző illesztéseihez tartozó M - R diagramokat összehasonlítva látható az effektív tömeg értéknek meghatározó szerepe. A modell optimális effektív tömegre illesztett változatának M - R görbéje (fekete csillag) az effektív tömegre illesztett modell M - R görbéje (üres kék háromszög) és a Landau-tömegre illesztett változat (kitöltött kék háromszög) görbéje között halad, annak megfelelően, hogy m_{opt} a másik két effektív tömeg érték között helyezkedik el.



4.3. ábra. A (4.2) definíciónak megfelelő modell variánsok felhasználásával kiszámított M - R diagramok, az effektív nukleon tömeg különböző értékeinek megfelelő illesztésekre. Az effektív tömegre illesztett modelleket üres szimbólumok jelölik, a Landau-tömegre illesztett verziókat pedig ezen szimbólumok kitöltött változata. Összehasonlításként az eredeti (extra kölcsönhatási tagok nélküli) σ - ω modell szerepel.

A 4.3. ábrán látható diagramok viselkedése nagyon hasonló az állapotegyenletek-nél tapasztaltakkal: az M - R görbék menetét az effektív nukleon tömeg értéke jelentősen befolyásolja, csakúgy mint az állapotegyenleteket. Az M - R görbék a nukleon effektív tömeg értékének megfelelő tartományokba rendeződnek: a Landau-tömegre illesztett modellek görbéi közel haladnak egymáshoz és jól elkülönülnek az egymáshoz szintén közel haladó effektív tömegre illesztett modellek görbeitől. Az effektív tömeg csökkenésével a görbékhez tartozó maximális neutroncsillag tömeg és maximális neutroncsillag-sugár nő, de nem azonos mértékben. Ennek abból a szempontból van kiemelkedő jelentősége, hogy a bevezető az 1.1.3. alfejezetében említetteknek megfelelően a maximális neutroncsillag-tömeg sokkal pontosabban mérhető, mint a sugár. Látható az effektív tömeg adott értékére illesztett modellek görbéin (azonos kitöltöttségű jelölők), hogy a hozzájuk tartozó maximális neutroncsillag-sugarak jobban különböznek, mint a maximális tömegek. Megfordítva, ez azt jelenti, hogy a maximális neutroncsillag-tömeg kevésbé érzékeny a modellek közötti különbségekre mint a neutroncsillagok maximális sugara.

A görbék ilyen viselkedése szemléletes: mivel a maximális sugarú csillagok kisebb tömegűek (definíció szerint), mint a maximális tömegű csillagok, így ezekben kisebb a nyomás és a sűrűség maximális értéke is, mint a maximális tömegű csillagokban. Ez azt jelenti, hogy a TOV-egyenletek integrálása során az állapotegyenletek kisebb nyomások és sűrűségek esetén érvényes részét kell csak használni, ahol, ahogy az A 4.2. ábrán látható, az állapotegyenletek viselkedése jobban eltér mint nagyobb nyomáson. Ezek alapján látható, hogy a minél pontosabb sugár mérések kiemelkedő fontosságúak a magfizikai modellek szelekciója, és a paraméterek illesztése szempontjából.

Szintén érdekes megfigyelés, hogy a nukleáris paramétereket legkisebb hibával reprodukáló modell, ami az m_{opt} optimális effektív tömeget használja, jóval nagyobb maximális csillagtömeget jósol, mint a modern mért értékek, csakúgy mint az effektív nukleon tömeg 1.1. táblázatban adott értékére illesztett modellek, típustól függetlenül [13, 20]. Ezekkel ellentétben a Landau-tömeg $m_N = 0,83 m_N$ értékére illesztett modellvariánsok reális maximális neutroncsillag tömeget és sugarat jósolnak [20].

A 4.3. ábrán bemutatott M - R diagramok összevetése a különböző modellekhez tartozó kompressziómodulus értékeket tartalmazó a 4.2. táblázattal arra enged következtetni, hogy vizsgált magmodellekre jellemző kompressziómodulus kis mértékben befolyásolja a csillagok maximális tömegét, hatása inkább a csillagok sugarára nézve érvényesül. Például az $U_3(\sigma)$ kölcsönhatási taggal rendelkező modell Landau-tömegre illesztett változatában a kompressziómodulus értéke 247 MeV, ami nagyon közel esik az $U_{34}(\sigma)$ modell 240 MeV-es értékéhez. Ennek ellenére a 4.3. ábrán látható, hogy az $U_3(\sigma)$ modell Landau-tömegre illesztett változatához (barna kitöltött négyzet) tartozó maximális tömeg közel esik az $U_{34}(\sigma)$ modell Landau-modellre illesztett változatához (kék kitöltött háromszög) tartozó maximális neutroncsillag-tömeghez, azonban jelentősen különbözik $U_{34}(\sigma)$ modell optimális tömegre (fekete csillag) és effektív nukleon tömegre (üres kék háromszög) illesztett variánsai által jósolt maximális neutroncsillag-tömegtől. Az a tény, hogy a kompressziómodulus értéke az $U_{34}(\sigma)$ minden variánsa esetében megegyezik, de a modellhez tartozó M - R diagramok maximuma jelentősen különbözik szintén erősíti a fenti feltételezést, miszerint a kompressziómodulus értéke nem befolyásolja jelentősen a neutroncsillagok maximális tömegét. Ez a helyzet hasonlónak tűnik az állapotegyenleteknél tapasztaltakhoz, azonban a 4.3. ábrán nincs elég adat ahhoz, hogy egyértelműen eldönthető legyen ez-e a helyzet. Előfordulhat, hogy a különböző kölcsönhatási tagok miatt az eltéréseket a modellek közötti különbségek okozzák.

A fenti kérdések pontosabb vizsgálatához hasznos egy adott modellen tanulmányozni a nukleáris paraméterek hatását az állapotegyenletre, úgy, hogy egyszerre csak egy paraméter különbözősége által okozott hatást látunk az M - R diagramon. Ezzel a módszerrel összehasonlítható a különböző nukleáris paraméterek hatása a neutroncsillagok jellemzőire. A módszer úgy is felfogható, hogy a TOV-egyenletek által megvalósított,

$$\text{állapotegyenlet} \rightarrow M\text{-}R \text{ diagram}, \quad (4.43)$$

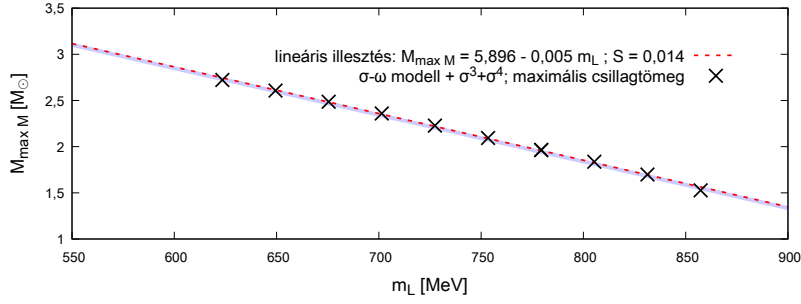
leképzés érzékenységét vizsgáljuk a maganyag mikroszkópikus paramétereire nézve. Ezeket a vizsgálataimat mutatom be a következő fejezetben.

A neutroncsillagok maximális tömege és a maganyag mikroszkópikus paraméterei

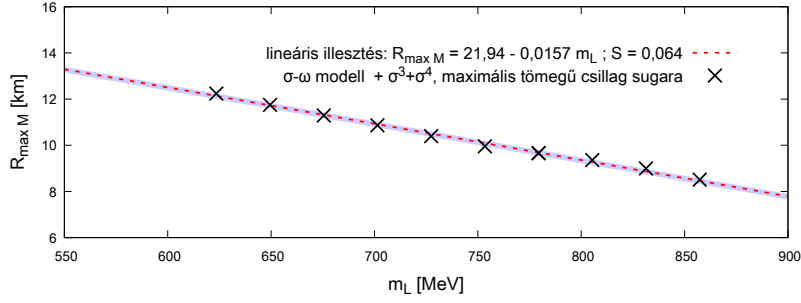
A maganyag mikroszkópikus paraméterei és a neutroncsillagok mérhető tulajdonságai közötti kapcsolat vizsgálatához a σ - ω modell, (4.2) egyenletek által definiált variánsai közül az $U_{34}(\sigma)$ kölcsönhatási tagnak megfelelőt használtam. A többi modellvariáns esetén nincs lehetőség az effektív tömeg és kompressziómodulus együttes illesztésére, ezért csak az egyik paraméter hatását lehetne vizsgálni. Ez a modell rendelkezik elég szabad paraméterrel ahhoz, hogy az 1.1. táblázatban szereplő összes nukleáris paraméterek értéke illeszthető legyen, figyelembe véve természetesen azt, hogy a Landau-tömeg és az effektív nukleon tömeg értéke nem független a (4.20) egyenletnek megfelelően, és hogy a szimmetria energia illesztése csak a modell 4.2. fejezetben tárgyalt aszimmetrikus maganyagot leíró kiterjesztésében lehetséges. Vizsgálataim során az effektív nukleon tömeg meghatározásához a Landau-tömeg 1.1. táblázatban megadott értékét vettem alapul, mivel a Landau-tömegre való illesztés a neutroncsillag-megfigyelések szempontjából realisztikusabb, $\sim 2M_{\odot}$ maximális tömegű neutroncsillagokat eredményez, amint az a 4.3 ábráról azonnal látható. A szimmetria energia értéke az ebben a fejezetben tárgyalt szimmetrikus maganyag esetén mindvégig $a_{szim} = 14,2$ MeV.

A mikroszkópikus paraméterek hatásának vizsgálatához először kiválasztottam az adott paramétert aminek értéke változni fog. A többi paraméter értéke állandó, az 1.1. táblázat alapján rögzített érték. A modell illesztését el kell végezni a változó paraméter minden lehetséges értékre, így tulajdonképpen annyi különböző állapotegyenletet kapunk, ahány pontban szeretnénk meghatározni a változó paramétertől való függést. Ezeket az állapotegyenleteket felhasználva a TOV-egyenletek megoldására M - R diagramok egy seregét kapjuk, melyeket a változó mikroszkópikus paraméter értékével címkézhetünk.

Az 1.1. táblázatban látható, hogy a nukleon effektív tömegre magfizikai mérések tág határokat adnak meg, ezért hasznos megvizsgálni, hogy az M - R diagram jelenleg legpontosabban mérhető paramétere, a maximális csillagtömeg, hogyan függ az effektív tömegtől. A fentiek alapján kiszámított maximális csillagtömeg-effektív nukleon tömeg (m_L) diagram a 4.4a. ábrán látható. A 4.3. ábrán látható, hogy a neutroncsillag sugara is függ az effektív tömeg értékétől, ezért az összefüggés pontos vizsgálatának céljából meghatároztam hogyan függ a maximális tömegű neutroncsillag sugara a Landau-tömegtől, ez látható a 4.4b. ábrán. A maximális csillagtömegének és sugarának effektív tömeg függése igen jó pontossággal lineáris. A kiszámított pontokra történő lineáris illesztés (szaggatott piros vonal) és az illesztés hibája (szürke sáv) ugyancsak látható a 4.4. ábrán az illesztés S standard eltéréseivel együtt. A 4.3. ábra elemzésnél említettek megerősítik az illesztett lineáris függvények: a maximális tömegű neutroncsillag tömege és sugara is jó közelítéssel lineárisan csökken, ha a nukleon Landau-tömeg nő.



(a)

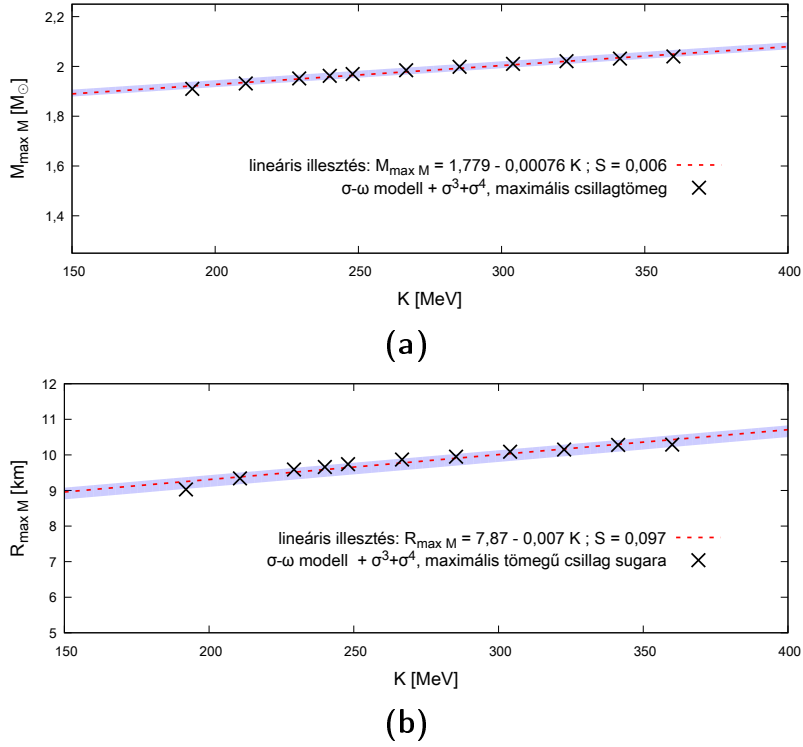


(b)

4.4. ábra. Felső panel: az $M_{max M}$ maximális neutroncsillag-tömeg az illesztett Landau-tömeg értékének függvényében. Alsó panel: a maximális tömegű neutroncsillag $R_{max M}$ sugarának Landau-tömeg függése. A pontokra illesztett egyenes (piros szaggatott vonal) és az illesztés hibája (szürke sáv) is látható mindkét panelen, az illesztett egyenes egyenletével, és az illesztés standard eltérésevel együtt. A számításokat a (4.1) Lagrange-függvénnyel adott σ - ω modell U_{34} skalár kölcsönhatási taggal kiegészített variánsával végeztem, az illesztési paraméterek a 1.1. táblázatban találhatók.

A 4.1.2. fejezetben említetteknek megfelelően a kompressziómodulus értéke kis mértékben befolyásolja csak a 4.3. ábrán látható M - R diagramok és 4.2. ábrán lévő állapotegyenletek viselkedését. A σ - ω modell $U_{34}(\sigma)$ típusú kölcsönhatási taggal kiegészített variánsát használtam, hogy a kompressziómodulus hatását összehasonlítsam a Landau-tömeg változtatása által okozott effektusokkal. A Landau-tömeggel elvégzett vizsgálatokhoz hasonlóan kiszámítottam, hogy hogyan befolyásolja a kompressziómodulus értéke a maximális tömegű csillag paramétereit. Ebben az esetben a kompressziómodulus értéke változik, és minden egyes új értékhez az 1.1. táblázatban található adatokra kell illeszteni a modell többi paraméterét. A különböző kompressziómodulus értékekhez tartozó modellek állapotegyenleteinek meghatározása után a TOV-egyenletet megoldva minden állapotegyenletre a kompressziómodulus értékével címkézett M - R görbéket kapunk. Minden M - R görbe estében meghatároztam a maximális tömegű csillag tömegét és sugarát, amiket a görbét címkéző kompressziómodulus függvényében ábrázolva a 4.5. ábrán látható diagramokat kaptam. A Landau-tömeg esetéhez hasonlóan ezek a diagramok is jól közelíthetők lineáris függvényekkel, az illesztett egyenesek (piros szaggatott vonal) és a hibáik (szürke sáv) az illesztések standard eltérésevel együtt ugyancsak a 4.5. ábrán láthatók. A kompressziómodulus növelésével a maximális tömegű neutroncsillag tömege és sugara is jó közelítéssel lineárisan nő.

A 4.4. és a 4.5. ábrákat összehasonlítva látható, hogy a Landau-tömeg és a



4.5. ábra. Felső panel: az $M_{max M}$ maximális neutroncsillag-tömeg a kompressziómodulus függvényében. Alsó panel: a maximális tömegű neutroncsillag $R_{max M}$ sugarának a kompressziómodulus függése. A pontokra illesztett egyenes (piros szaggatott vonal) és az illesztés hibája (szürke sáv) is látható mindkét panelen, az illesztett egyenes egyenletével, és az illesztés standard eltéréssel együtt. A számításokat a (4.1) Lagrange-függvénnyel adott σ - ω modell $U_{34}(\sigma)$ skalár kölcsönhatási taggal kiegészített variánsával végeztem, az illesztési paraméterek az 1.1. táblázatban találhatóak.

kompressziómodulus vizsgálatának esetében is igaz, hogy a lineáris függvényillesztés hibája a maximális neutroncsillag-tömeg esetében kisebb, mint a sugár esetében.

Az illesztett egyenesek meredekségét összehasonlítva az is látható, hogy a maximális tömegű neutroncsillag tömege és sugara is körülbelül egy nagyságrenddel kisebb mértékben függ a kompressziómodulus értékétől mint a Landau-tömeg nagyságától. Ez könnyen érthető, ha megvizsgáljuk mi történik a maximális csillag tömegével, ha mind a Landau-tömeget, mint a kompressziómodulust megváltoztatjuk az 1.1. táblázatban lévő referenciaértékük 10 %-ával. A Landau-tömeg esetén, ez:

$$\Delta m_L = 0,1 \cdot 0,83 m_L \approx 78 \text{ MeV} \quad (4.44)$$

azaz a maximális csillagtömeg változása:

$$\Delta M_{max M} = -0,005 \cdot \Delta m_L \approx 0,39 M_\odot. \quad (4.45)$$

A kompressziómodulus esetében a tömegváltozás:

$$\Delta M_{max M} = -0,00076 \cdot \Delta K \approx -0,018 M_\odot. \quad (4.46)$$

A (4.45) és a (4.46) eredményeket összehasonlítva látható, hogy a Landau-tömeg 10 %-al történő megváltoztatása mintegy 20-szor nagyobb változást okoz a maximá-

lis neutroncsillag tömeg értékében. Hasonló számolás a maximális csillag sugarának változására nézve azt adja, hogy a Landau-tömeg 10 %-os változása mintegy hétszer nagyobb mértékben befolyásolja a maximális tömegű csillag sugarát, mint a kompressziómodulus ugyanilyen mértékű változása. Ezek az eredmények összhangban vannak a 4.3. ábrán látható M - R diagramoknál elmondottakkal.

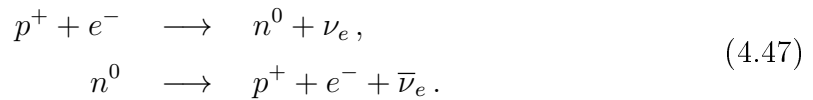
A fentiek együtt azt jelentik, hogy az nukleon effektív tömeg pontos értékének beállítása nélkül, nehéz különbséget tenni a σ - ω modell különböző paraméterekhez tartozó illesztései között a neutroncsillagokra vonatkozó megfigyelésekkel. Megfordítva: mivel a neutroncsillagok mért jellemzőiből az M - R diagramot leginkább befolyásoló nukleáris paraméter határozható meg nagy pontossággal. Az általam vizsgált modell esetében ez az effektív nukleon tömeg, vagy Landau-tömeg. A maganyag kompresszibilitása kis mértékben módosítja ezt az eredményt, és hatása legerősebben a neutroncsillagok sugarának meghatározásakor mutatkozik, ami azonban a jelenlegi módszerekkel egyelőre kis pontossággal mérhető adat. Összefoglalva ezek az eredmények a 3.5. fejezetben leírtakhoz hasonlóan a neutroncsillag sugár mérések fontosságát hangsúlyozzák a magfizikai modellezés szempontjából. Az álarc probléma egy konkrét megjelenési formáját is bemutatja a fenti számolás, a 4.4. illetve a 4.5. ábrák a 4.3. ábrán látható M - R diagramokkal történő összevetése után: egy mikroszkópikus paraméter (jelen esetben a Landau-tömeg) olyan nagy mértékben befolyásolja az M - R diagram menetét, hogy a többi mikroszkópikus paraméter által okozott hatást elnyomja, így csak precíz asztrofizikai mérésekkel lehetne különbséget tenni a modellek között. Az is látható a 4.2. ábrán lévő, különböző modell variánsokhoz és illesztésekhez tartozó állapotegyenleteken, hogy ez a hatás már az állapotegyenletek szintjén érvényesül, és a TOV-egyenletek megoldását követően továbbterjedt az M - R diagramokra. Ez arra enged következtetni, hogy az álarc probléma fő oka abban keresendő, hogy az állapotegyenlet kevésbé érzékeny a különböző magmodellek közötti finom különbségekre.

4.2. Az aszimmetrikus maganyag paramétereinek vizsgálata

A 4.1. fejezetben azt vizsgáltam, hogy a szimmetrikus maganyag paramétereinek változtatása hogyan befolyásolja az M - R diagram szerkezetét. Ezek a vizsgálatok az első lépést jelentik a maganyag mikroszkópikus paramétereinek hatásának felderítésében és képet adnak arról, hogy milyen a maganyag-modell alapvető viselkedése. Ebben a fejezetben vizsgálataimat kibővítem az aszimmetria energia, és a neutroncsillagokban jelen lévő β -egyensúly figyelembevételével. Az ezek által okozott korrekciók nagyságának megállapításához az eredményeket összehasonlítom a szimmetrikus maganyagból kapott jóslatokkal. A cél annak a vizsgálata, hogy az előző fejezetben kapott eredmények milyen mértékben általánosíthatók, mennyire befolyásolja a rendszer viselkedését újabb tényezők, mint például a β -egyensúly vagy a szimmetria energia, figyelembevétele.

4.2.1. Aszimmetrikus maganyag leírása a kiterjesztett σ - ω modellben

A neutroncsillagokban a maganyag β -egyensúlyban van, mert a nagy nyomás és sűrűség hatására az elektronok befogása az atommagba energetikailag kedvező folyamattá válik és dinamikai egyensúly alakul ki az elektronok befogása és a β -bomlás között:



A neutrínók jelentős szerepet játszanak a hűlési folyamatokban a neutroncsillagok keletkezése során, de az általam vizsgált, egyensúlyban lévő, nulla abszolút hőmérsékletű maganyagból álló neutroncsillagok esetén járuléku az állapotegyenlethez elhanyagolható [12, 13, 28].

A β -egyensúlyban lévő maganyag leírásához ki kell egészíteni a szimmetrikus maganyag (4.1) Lagrange-függvényét az elektronokkal és a ρ_μ^a vektormezonnal. A ρ -vektormezon veszi figyelembe a protonok és elektronok számának különbsége miatti többletenergiát, így a bevezetőben az (1.13) egyenlet által definiált szimmetriaenergia hatása ezen a komponensen keresztül lép be az elméletbe. A fentieknek megfelelően

az aszimmetrikus maganyag Lagrange-függvénye az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \bar{\Psi} (i\not{\partial} - m_N + g_\sigma \sigma - g_\omega \not{\omega} + g_\rho \not{\rho}^a \tau_a) \Psi + \\
& + \frac{1}{2} \sigma (\partial^2 - m_\sigma^2) \sigma - U_i(\sigma) \\
& - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega^\mu \omega_\mu \\
& - \frac{1}{4} \rho_{\mu\nu}^a \rho^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_\mu^a \rho^{\mu a} \\
& + \bar{\Psi}_e (i\not{\partial} - m_e) \Psi_e,
\end{aligned} \tag{4.48}$$

ahol minden jelölés megegyezik a (4.1) Lagrange-függvényben lévő jelölésekkel, ezen felül pedig $\bar{\Psi}_e$ az elektront leíró fermion tér, m_e az elektron tömege, m_ρ a vektormezon tömege, g_ρ a vektormezon és a nukleonok közötti csatolás, valamint

$$\rho_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \rho_\nu^a - \partial_\nu \rho_\mu^a + g_\rho \epsilon^{abc} \rho_\mu^b \rho_\nu^c. \tag{4.49}$$

Az aszimmetrikus modell megoldása átlagér közelítésben

A szimmetrikus esethez hasonlóan átlagtér közelítésben vizsgálom az aszimmetrikus modellt, ezért a ρ -vektormezon komponensei közül csak a ρ_0^3 nem nulla, és minden, a ρ -vektormezon deriváltját tartalmazó kifejezés eltűnik a (4.48) Lagrange-függvényben [12]. A 4.1 fejezetben tárgyaltakhoz hasonlóan érdemes bevezetni a (4.4) jelölések mellett az alábbi jelöléseket a ρ -vektormezon átlagértékére és a csatolására:

$$z = g_\rho \rho_0^3 \quad f_\rho = \frac{m_\rho}{g_\rho}. \tag{4.50}$$

Átlagtér közelítésben a pályaintegrál a 4.1. fejezetben leírtakhoz hasonlóan végezhető el. Az eredmény abban különbözik az ott kapott (4.13) eredménytől, hogy tartalmazza az elektronnak és a ρ -vektormezonnak megfelelő fermionikus szabadenergia-járulékot is, emellett a proton és a neutron kémiai potenciálja nem egyezik meg, hanem ρ -mezón átlagértékével arányos, ellentétes előjelű korrekciókat kapnak. Felhasználva, hogy $T = 0$ abszolút hőmérsékleten a (3.27) termodinamikai relációk miatt igaz, hogy $p = -f$, az aszimmetrikus, kiterjesztett σ - ω modell nyomása az alábbi alakba írható:

$$\begin{aligned}
p = & p_F(m_N - x, \mu_p - y + z) + p_F(m_N - x, \mu_n - y - z) + p_F(m_e, \mu_e) + \\
& + \frac{f_\omega^2}{2} y^2 + \frac{f_\rho^2}{2} z^2 - U_i(x) - \frac{f_\sigma^2}{2} x^2,
\end{aligned} \tag{4.51}$$

ahol μ_p , μ_n és μ_e rendre a proton, a neutron és ez elektron kémiai potenciálja, p_F pedig a fermionikus nyomás egy szabadsági fok esetére zérus hőmérsékleten [12, 50]:

$$p_F(m, \mu) = \frac{1}{8\pi^2} \left[\left(\frac{2}{3} k_F^2 - m^2 \right) k_F \mu + \mu^4 \ln \left(\frac{k_F + \mu}{\mu} \right) \right], \tag{4.52}$$

ahol $k_F^2 = \mu^2 - m^2$ a fermion zéró hőmérsékleten vett Fermi-momentuma. A nyomás értékének kiszámításához meg kell határozni x , y és z értékét az adott fizikai pontban. A szimmetrikus esetben ehhez a (4.19) szélsőérték egyenleteket kellett megoldani. Mivel az aszimmetrikus esetben eggyel több térváltozó van, ezért az erre vonatkozó szélsőérték egyenlettel kell kiegészíteni a (4.19) feltételeket. A megoldandó egyenletrendszer az alábbi módon írható:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_F}{\partial m} (m_N - x, \mu_p - y + z) + \frac{\partial p_F}{\partial m} (m_N - x, \mu_n - y - z) - \\
&\quad - f_\sigma^2 x - \frac{\partial U_i(x)}{\partial x} \\
0 &= \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p_F}{\partial \mu} (m_N - x, \mu_p - y + z) + \frac{\partial p_F}{\partial \mu} (m_N - x, \mu_n - y - z) + f_\omega^2 y \\
0 &= \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p_F}{\partial \mu} (m_N - x, \mu_n - y - z) - \frac{\partial p_F}{\partial \mu} (m_N - x, \mu_p - y + z) + f_\rho^2 z,
\end{aligned} \tag{4.53}$$

ahol $\frac{\partial p_F}{\partial \mu} = n_F$ a fermionok sűrűsége, $\frac{\partial p_F}{\partial m} = -n_s$ pedig a (4.25) egyenlettel definiált skalársűrűség. Mivel aszimmetrikus anyag esetén nem teljesül, hogy $\mu_p = \mu_n$, a (4.53) az egyenletrendszer megoldása során a fermionokhoz tartozó kémiai potenciálok meghatározásához szükség van további összefüggésekre. A β -egyensúlyt és a töltésemlegességre vonatkozó feltételt felhasználva az alábbi egyenleteket kapjuk [12]:

$$\begin{aligned}
\mu_e + \mu_p &= \mu_n \quad (\beta\text{-egyensúly}) \\
n_e &= n_p \quad (\text{töltésemlegesség}).
\end{aligned} \tag{4.54}$$

A kémiai potenciálokra vonatkozó feltételek az elektronok $T = 0$ hőmérsékleten érvényes diszperziós relációját felhasználva könnyen átalakíthatóak a k_F Fermi-momentumra és m_N^* effektív tömegre vonatkozó egyenletekké. Felhasználva tehát, hogy $\mu^2 = k_F^2 + m^2$, a β -egyensúlyra vonatkozó egyenlet:

$$\sqrt{k_{Fe}^2 + m_e^2} + \sqrt{k_{Fp}^2 + (m_N - x)^2} + y - z = \sqrt{k_{Fn}^2 + (m_N - x)^2} + y + z. \tag{4.55}$$

Mivel a fermionikus nyomás a (4.52) egyenletében is csak a fermionok k_F Fermi-momentuma, m tömege és μ kémiai potenciálja szerepel, a (4.55) egyenlet könnyen hozzávehető a (4.53) egyenletrendszerhez. A (4.17) egyenlet felhasználásával a töltésemlegességet leíró egyenlet a (4.54) összefüggésekben szintén felírható a fermionok k_F Fermi-momentumának függvényeként, így a töltésemlegességet kifejező feltétel is könnyen hozzávehető a (4.53) egyenletrendszerhez. Az fenti módon kibővített egyenletrendszer megoldásához csak egy paramétert kell rögzíteni a számolás elején, és abból minden más meghatározható. Rögzíthető például a proton vagy a neutron Fermi-momentuma, esetleg ezek bármelyikének kémiai potenciálja.

Paraméterillesztés az aszimmetrikus σ - ω modellben

A modell paramétereinek illesztéséhez továbbra is a szimmetrikus végtelen maganyagot kell használni, ezért az $n_p = n_n$ feltétel érvényes a nukleáris paraméterek rögzítésekor. Az illesztés menete teljesen megegyezik a 4.1. fejezetben leírtakkal, csak ki kell egészíteni a ρ -vektormezon csatolásának meghatározásával. A szimmetria energia 1.1.1. fejezetben bevezetett (1.14) definícióját használva, az illesztés teljesen megegyezik az irodalomban megtalálható, eredeti σ - ω modell (Walecka-modell) esetében történnő illesztéssel [12]. A ρ -mezón f_ρ csatolásának meghatározásához az alábbi egyenletet a szaturációs pontban érvényes paraméter értékek mellett megoldani:

$$a_{szim} = \frac{k_F^3}{3\pi^2} \left(\frac{1}{f_\rho} \right)^2 + \frac{k_F^2}{6\sqrt{k_F^2 + m^{*2}}}. \quad (4.56)$$

Az illesztési paraméterek értéke megegyezik az 1.1. táblázatban felsorolt értékekkel. Az a_{szim} szimmetria energia illesztett értéke [12]:

$$a_{szim} = 32,5 \text{ MeV}. \quad (4.57)$$

A maganyag tulajdonságai a kiterjesztett aszimmetrikus σ - ω modellben

A termodinamikai paraméterek kiszámítása hasonlóan történik az aszimmetrikus modellben, mint a 4.1. fejezetben leírt szimmetrikus modell esetében. A nyomást a (4.51) egyenlet alapján kell kiszámítani a kémiai potenciál különböző értékei esetére. Az aszimmetrikus esetben három különböző kémiai potenciál van, melyek között a β -egyensúlyt és a töltéssemlegességet leíró (4.54) egyenletek teremtenek kapcsolatot, így egy kémiai potenciál értékének megadása is elég a nyomás kiszámításához.

A protonra és a neutronra vonatkozó nukleonsűrűség különböző, ellentétben a szimmetrikus esettel. A (4.53) szélsőértékegyenletek megoldása során kiszámított $\mu_p^* = \mu_p - y + z$ és $\mu_n^* = \mu_n - y - z$ effektív nukleon kémiai potenciálok ismeretében az adott nukleon sűrűsége a szimmetrikus esethez hasonlóan a (4.17) képlet alapján számítható ki, de figyelembe kell venni, hogy most csak egy fermionikus szabadsági fok sűrűségéről van szó. Ezért a nukleonsűrűség az aszimmetrikus esetben:

$$n_i = \frac{k_{Fi}^3}{3\pi^2}, \quad (4.58)$$

ahol i a nukleon típusának indexe, $k_{Fi}^2 = \mu_i^* - (m_N^*)^2$ pedig az adott nukleon Fermi-momentuma. Az elektron sűrűsége k_{Fi} helyére az elektron Fermi-momentumát helyettesítve számítható ki.

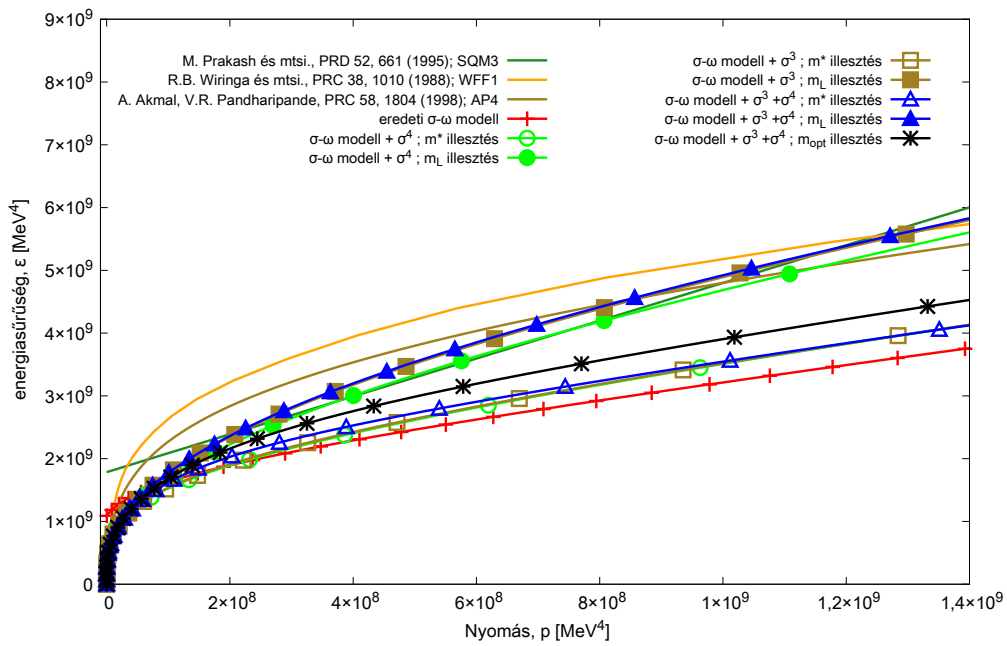
Az energiasűrűség kiszámítása abban különbözik a szimmetrikus esettől, hogy a neutron és a proton energiajáruléka különböző, mivel nem egyezik meg a kémiai potenciáljuk, és figyelembe kell venni az elektronok és a ρ -vektormezon energiajárulékát is. Az (1.5) termodinamikai relációkat felhasználva, az energiasűrűség az alábbi alak-

ba írható:

$$\epsilon = -p(\mu_p, \mu_n, \mu_e) + \mu_p n_p + \mu_n n_n + \mu_e n_e \quad (4.59)$$

ahol n_p , n_n és n_e rendre a (4.58) egyenlet alapján kiszámított proton, neutron és elektron sűrűség. A mezonok járulékait a (4.51) egyenlet alapján kiszámított nyomás tartalmazza, aminek itt csak a termodinamikai változóit tüntettem fel.

A nyomást és az energiasűrűséget a fentebb leírt módon meghatározva a modellekhez tartozó állapotegyenleteket kapjuk. Az eredmény a 4.6. ábrán látható. Az aszimmetrikus maganyagot leíró állapotegyenleteket összehasonlítva a szimmetrikus maganyag a 4.2. ábrán látható állapotegyenletekkel, az alábbi megállapítások tehetők.



4.6. ábra. A (4.48) Lagrange-függvénnyel megadott, aszimmetrikus maganyagot leíró σ - ω modell (4.2) definícióknak megfelelő variánsaihoz tartozó állapotegyenletek. Az adott modellek esetében az effektív nukleon tömeg különböző értékeinek megfelelő illesztéseihez tartozó állapotegyenleteket ugyanazon szimbólum kitöltött és kitöltetlen változatával jelöltem. Az illesztési paraméterek értéke az 1.1. táblázatban található, megegyezik a szimmetrikus σ - ω modell esetében használt adatokkal. Összehasonlításként az eredeti σ - ω modell szerepel (piros '+') és feltüntettem a szakirodalomban elterjedt és használt SQM3 (kék) [53], WFF1 (sárga) [54] és AP4 (barna) [55] modellek állapotegyenleteit is.

- A szakirodalomból vett referenciaként használt AP4 [55], WFF1 [54] és SQM3 [53] állapotegyenletekkel összehasonlítva látható, hogy a szimmetrikus és az aszimmetrikus maganyaghoz tartozó állapotegyenletek hasonló nagyságrendű értékek között mozognak. Az aszimmetria tag figyelembevétele kis korrekciót jelent a nyomás és az energiasűrűség értékére nézve.
- A szimmetrikus esetben az állapotegyenletek a nyomás nulla értékénél véges energiasűrűséggel rendelkeznek, ezért a $p = 0$ pontban görbéik véges energiasűrűségnél metszik a függőleges tengelyt. Ez a viselkedés annak felel meg, hogy a

szimmetrikus maganyag zéró nyomáson stabil, kötött anyagot alkot. Ezzel szemben az aszimmetrikus anyaghoz tartozó állapotegyenletekhez a $p = 0$ pontban $\epsilon = 0$ energiasűrűség tartozik. A β -egyensúlyban lévő anyag eltűnő nyomáson nem stabil, a neutroncsillagok gravitációs tere által létrehozott nyomás stabilizálja. Az állapotegyenletek viselkedése alacsony energiasűrűségen és nyomáson jelentősen befolyásolja a belőlük kiszámított neutroncsillagok sugarát [13, 28].

Ennek oka szemléletesen megérthető: a TOV-egyenletek integrálása során a neutroncsillagot egymásra épülő koncentrikus gömbhéjakból építjük fel, melyek sűrűsége és ezért járuléka a neutroncsillag teljes tömegéhez a külső kis nyomású rétegekben a legkisebb. A külső rétegek tehát kis tömegük miatt nem módosítják jelentősen a teljes neutroncsillag tömeget, a sugárra gyakorolt hatásuk azonban jelentős, ugyanis a TOV-egyenletek integrálása egészen a $p = 0$ nyomás eléréséig folytatódhat egyre kisebb sűrűségű gömbhéjak hozzáadásával.

Minél kisebb a neutroncsillag teljes tömege annál kisebb a középpontjában az energiasűrűség és a nyomás értéke, ezért a kisebb csillagok esetében az állapotegyenlet kisebb nyomásokhoz és energiasűrűségekhez tartozó része relatíve nagyobb szerephez jut. A numerikus integrálás során a szekvenciálisan kiszámított gömbhéjak nyomása és sűrűsége ebből a kisebb sűrűségű tartományból kerül ki, ezért a csillag szélén lévő kis sűrűségű gömbhéjak tömege és energiasűrűsége egyre kevésbé tér el a neutroncsillag belsejében lévőkétől, ahogy egyre kisebb csillagokat vizsgálunk. A fentiek miatt a szimmetrikus és az aszimmetrikus állapotegyenletek kis nyomáson való eltérő viselkedése, várhatóan a kis tömegű neutroncsillagok esetén okozza a legnagyobb különbségeket az M - R diagramon.

- A szimmetrikus maganyag 4.2. ábrán látható állapotegyenletihez hasonlóan az aszimmetrikus esetben is az tapasztalható, hogy az állapotegyenletek az effektív nukleon tömeg illesztett értékének megfelelően rendeződnek el. A Landau-tömeg értékre illesztett modellek esetében adott nyomáson az energiasűrűség mindig magasabb, mint az effektív tömegre illesztett változat esetében. Ez első látásra nyilvánvaló a 4.6. ábrán ahol a Landau-tömegre illesztett modellek állapotegyenleteit kitöltött szimbólumok, míg az effektív nukleon tömeg mért értékére illesztetteket üres szimbólumok azonosítják. A görbék a nyomás növekedésével egyre inkább szétválnak és az effektív nukleon tömeg különböző értékeihez tartozó állapotegyenletek egyre jobban elkülönülnek egymástól. Az is könnyen látható a 4.6. ábrán, hogy az azonos effektív nukleon tömegre illesztett modellek görbéi közel haladnak egymáshoz attól függetlenül, hogy milyen $U_i(\sigma)$ kölcsönhatási tagot tartalmaz a modell. A fentiek miatt a szimmetrikus esethez hasonlóan az várható, hogy az effektív nukleon tömeg értéke jelentős hatással van az állapotegyenletekből kiszámított M - R diagram tulajdonságaira.

4.2.2. A TOV-egyenletek megoldása és a neutroncsillagok megfigyelhető tulajdonságai a kiterjesztett σ - ω modellben aszimmetrikus maganyag esetén

A (4.48) Lagrange-függvénnyel leírt β -egyensúlyban lévő maganyag a neutroncsillagok magjában jelen lévő nagy nyomás és nagy sűrűség hatására létezik tartósan, mert az erős gravitációs mező hatására energetikailag kedvezővé válik az elektronok befogásával történő inverz β -bomlás [28]:

$$p^+ + e^- \longrightarrow n + \nu_e. \quad (4.60)$$

Ez azt jelenti, hogy szigorúan véve a 4.6. ábrán lévő állapotegyenletek csak a csillag magjában jelen lévő körülmények között írják le a neutroncsillagok anyagát. A neutroncsillag kérgében már nem maganyagot, hanem egzotikus neutronban gazdag magokat találunk, a legkülső rétegekben pedig rácsba rendezett vas atommagokat [28]. A fentiek miatt adott nyomás alatt az aszimmetrikus maganyagot leíró modell alkalmazása már nem indokolt. A szakirodalomban elterjedt módszer szerint egy a neutroncsillag kérgét leíró, kis nyomáson érvényes állapotegyenlettel kell helyettesíteni a maganyag állapotegyenletét a nyomás alacsony értékeire [12]. Ez az eljárás egy új változó tényezőt, a csillag kérgének állapotegyenletét, vezet be az M - R diagram vizsgálatába. A TOV-egyenletek integrálása során a két állapotegyenlet együttes hatását látjuk, ezért az eredményből nehezebb visszakövetkeztetni a maganyagot leíró állapotegyenlet hatására. A fentiek miatt a TOV-egyenletek integrálása során az alábbi eljárást követtem, hogy a csillag magját alkotó β -egyensúlyban lévő maganyag hatását elkülönítsem.

A TOV-egyenletek megoldása során a középpontból kiindulva centrálisan elhelyezkedő infitezimálisan vékony gömbhéjakból épül fel az eredmény. A középpontból kifelé haladva a gömbhéjakban nyomás és az energiasűrűség csökken. Amikor a numerikus integrálás olyan gömbhéjhoz ér, ahol a nyomás értéke már alacsonyabb, és neutroncsillag kérgét leíró állapotegyenlet érvényes, akkor innentől kezdődően az integrálás során csak a kéregre vonatkozó állapotegyenletet kell használni, hiszen a továbbiakban csak ennél kisebb nyomás értékek fordulnak elő. A szokásos megoldási módszer alapján az integrálás addig folytatódik, míg a nyomás eléri a nullát, vagy egy előre definiált nagyon kicsi numerikus értéket ami a csillag szélének felel meg. Ekkor a végeredmény a csillag magját alkotó anyag és a kéreg járulékát is tartalmazza.

Vizsgálataim során az integrálást annál a p_0 nyomás értéknél állítottam meg, amely a kéregben és magban érvényes állapotegyenlet elválasztja egymástól. Ekkor a fentiek értelmében a neutroncsillag kérgét leíró állapotegyenlet hatása egyáltalán nem jelenik meg a megoldásban, azonban a csillag kérgének járulékát a sugárhoz és a tömeghez elhanyagoljuk. A fenti módszert követve a TOV-egyenletek megoldásával a neutroncsillag magjára vonatkozó adatok határozhatóak meg. Az integrálás során

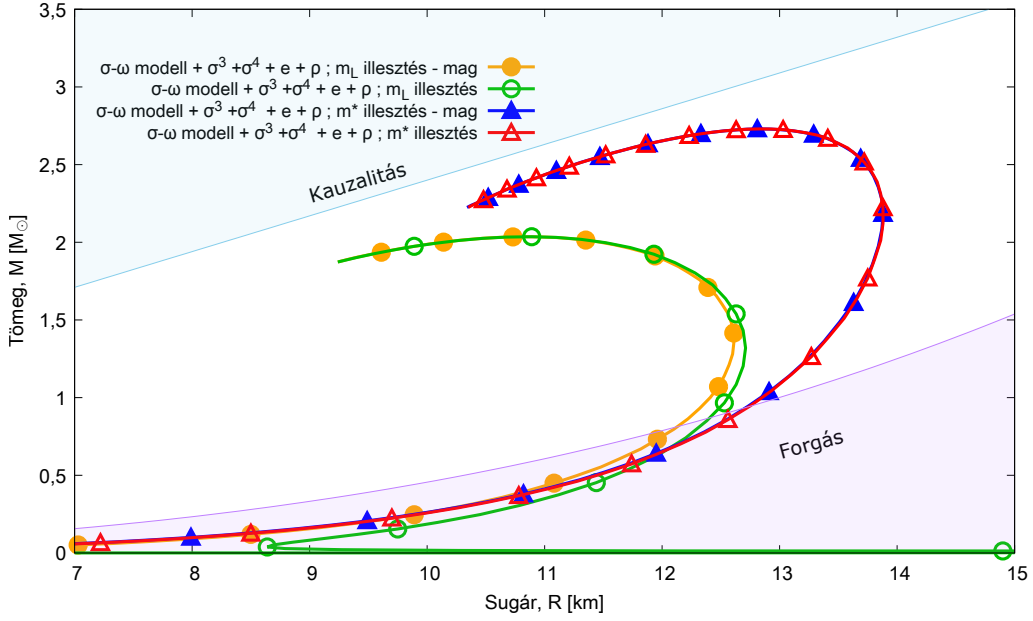
kiszámított tömeg és sugár úgy interpretálhatóak, mint a neutroncsillag magjának jellemzői.

A TOV-egyenletek fenti módon történő megoldása a neutroncsillag tömegének és sugarának konzervatív becslést adja, mert a kéreg hatásának figyelembevétele a tömeget és a sugarat is tovább növeli. Megvizsgáltam, hogy a TOV-egyenletek integrálásának megállítása a kéreg és a mag állapotegyenletét határoló nyomásnál mekkora eltérést okoz az eredeti módszerhez képest. Számításaim során a p_0 határoló nyomás meghatározásához a BPS állapotegyenletet használtam a neutroncsillag kérgének jellemzésére [12, 88]. Az összehasonlításhoz a számításokat kétféleképpen végeztem el:

- Az integrálást $p = p_0$ értéknél megállítva a csillag magjának határán.
- Az integrálást a $p = 0$ értékig folytatva, de csak a magot leíró állapotegyenletet használva.

Egyik számítás során sem használtam a BPS állapotegyenletet, szerepe csak a p_0 érték meghatározása volt. A számításokat az állapotegyenletek két jellegzetes típusára végeztem el. Az egyik esetben olyan állapotegyenletet vettem, ami kötött maganyagot ír le, ezért az egyre kisebb tömegű neutroncsillagok sugara is egyre kisebb. Ez azt jelenti, hogy az M - R görbe kis tömekhez kis sugarakat rendel, azaz az M - R sík origója felé tart. Ilyenek például a szimmetrikus maganyagot leíró állapotegyenletek a 4.2. ábrán, a hozzájuk tartozó M - R diagramok a 4.3. ábrán mind az origó felé hajlanak kis tömegek esetén. Az állapotegyenletek másik csoportja szabad anyagot ír le kis sűrűségeken, amit a gravitációs vonzásnak kell összetartania, ezért a kis tömegek felé a hozzájuk tartozó M - R diagramok a nagy sugarak felé térnek el, mert a gravitációs mező nem elég erős ahhoz, hogy jobban megnövelje az anyag sűrűségét. A 4.6. ábrán látható aszimmetrikus maganyagot leíró állapotegyenletek ebbe a csoportba tartoznak. A számítások eredménye a 4.7. ábrán látható. Az ábráról az alábbi következtetések vonhatóak le a TOV-egyenletek megoldására vonatkozóan:

- A TOV-egyenletek integrálásának megállítása a neutroncsillag magjának határán konzervatív becslés az eredeti megoldási módszerhez képest, ugyanis minden kitöltött szimbóllummal jelölt görbe kisebb tömeg és sugár értékeket jósol, mint a teljes integrál elvégzését jelentő üres szimbóllummal jelölt görbék.
- A $p = 0$ nyomáson kötött maganyagot leíró állapotegyenlet esetén az M - R diagram egyre kisebb tömegű neutroncsillaghoz egyre kisebb sugár értékeket rendel. Ebben az esetben a csillag magjára illetve a teljes csillagra történő integrálás eredménye közötti különbségre az ábra vonalszélességénél kisebb érték adódik (üres és kitöltött háromszög). Ez azt jelenti, hogy a 4.2. ábrán látható, szimmetrikus maganyagot leíró állapotegyenletekből kiszámított M - R diagramok a 4.3. ábrán ugyanígy néznének ki a konzervatív becslés esetén is.

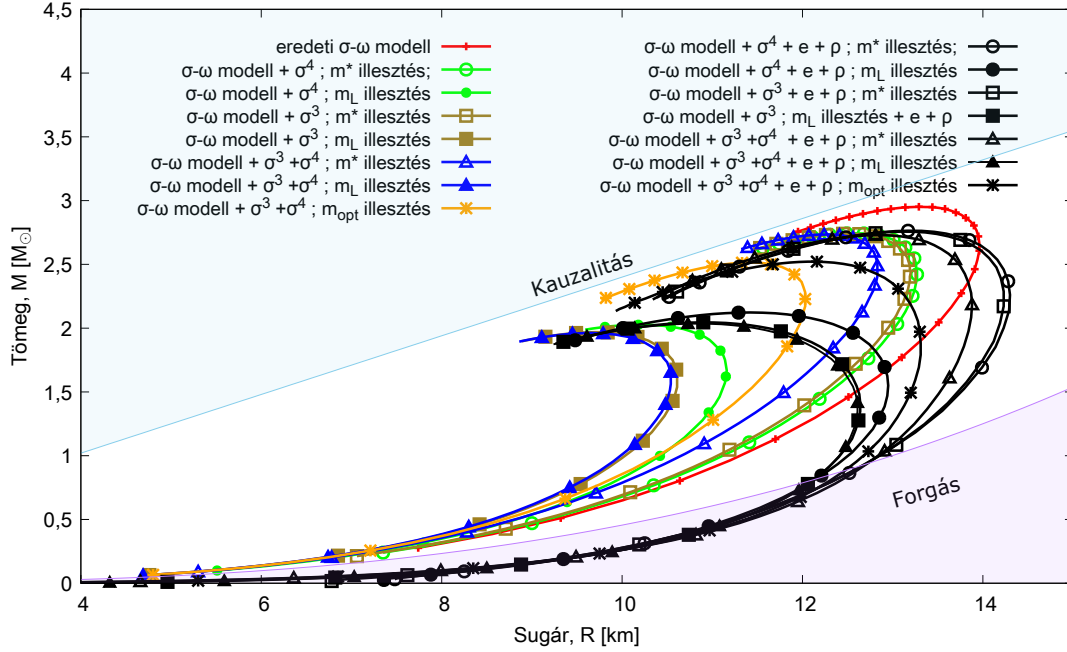


4.7. ábra. A két alapvető típusú állapotegyenlethez tartozó M - R diagramok a TOV-egyenletek különböző megállítási feltételekkel történő integrálása esetén. Az ábrán a (4.48) Lagrange-függvénnyel adott modell $U_{34}(\sigma)$ kölcsönhatási taggal kiegészített változatának Landau-tömegre illesztett (kör) és az effektív nukleon tömeg mért értékére illesztett (háromszög) variánsa szerepel. A kitöltött szimbólumok azokat a megoldásokat jelölik, ahol a TOV-egyenletek integrálását csak a csillag magjának határáig végeztem, és a kéregre vonatkozó részt elhanyagoltam. Az üres szimbólumokkal jelölt görbék a TOV-egyenletek teljes megoldását mutatják, ahol az integrálást a maganyag állapotegyenletét felhasználva egészen a neutroncsillag határáig elvégeztem.

- Az olyan állapotegyenletek esetén, melyek kis nyomáson egyre kisebb energiasűrűségű anyagot írnak le, és így a hozzájuk tartozó M - R diagram egyre kisebb tömegek esetén egyre nagyobb sugár értékek felé tér el a kétféle számítási mód között nagyobb különbség tapasztalható (üres és kitöltött kör). A magra vonatkozó konzervatív becslésnél elmondottaknak megfelelően a legnagyobb eltérés a kis tömegű csillagok esetén tapasztalható. Egy másik lényeges változás, hogy a konzervatív magra vonatkozó becslés esetén az M - R diagram típusa megváltozik: a kis tömegű csillagok esetén nagy sugár értékeket jósoló diagram menete átvált a nulla nyomáson kötött maganyagot leíró diagram típusra. Ennek magyarázta az, hogy a konzervatív magra vonatkozó becslés során az integrálást a $p = p_0$ nyomásnak megfelelő pontban megállítjuk és soha nem kell felhasználni az állapotegyenlet azon részét ami kis nyomásokon és sűrűségeken a görbe visszafordulását eredményezi. Kisebb tömegű csillagok esetén a csillagot alkotó anyag nagy része az állapotegyenlet kis nyomású és sűrűségű részéből kerül kis, és ezért ezeknél az objektumoknál tapasztaljuk a legnagyobb eltérést a két közelítés között, annak megfelelően, hogy a két módszer csak az állapotegyenlet alacsony sűrűségű és nyomású részének kezelésében tér el.
- Jól látható, hogy az állapotegyenletek típusától függetlenül a maximális tömegű csillagok esetében a vonalvastagságnál kisebb eltérést jelent a TOV-egyenletek integrálására vonatkozó módszerek közötti különbség. A maximális csillagtömeg a jelenlegi módszerekkel az M - R diagramra vonatkozó legpontosabban mérhető

adat, ezért viszonylagos érzéketlensége a TOV-egyenletek integrálásának leállítási feltételére robusztusabbá teszi a különböző modellek szelekcióját.

A neutroncsillag magjára vonatkozó konzervatív becslést felhasználva megoldottam a TOV-egyenleteket a 4.6. ábrán látható, aszimmetrikus maganyagot leíró állapotegyenletek felhasználásával. A szimmetria energia M - R diagramra gyakorolt hatásának vizsgálatához az eredményeket összehasonlítottam a vizsgált modellek szimmetrikus maganyagot leíró változatára vonatkozó számításokkal, amiket a 4.3. ábrán mutattam be. Az eredmények összevetése a 4.8. ábrán látható. Az M - R diagram



4.8. ábra. A kiterjesztett σ - ω modell szimmetrikus és aszimmetrikus maganyagot leíró változataihoz tartozó M - R diagramok. Az azonos szimbólummal jelzett görbék ugyanannak a modellnek felelnek meg, a szimmetrikus maganyaghoz tartozó variánszt színes szimbólumok az aszimmetrikushoz tartozót pedig egységesen az adott szimbólumok fekete változata jelöli.

mok összevetéséből az alábbi következtetések vonhatóak le az asszimmetria energia figyelembevételének hatásaira:

- Az aszimmetrikus maganyagból álló neutroncsillagok sugara mintegy 10–20 %-al nagyobb mint az ugyanazon maganyag modell szimmetrikus változatához tartozó neutroncsillagoké. Ez azt jelenti, hogy a realiztikusabb, aszimmetrikus maganyagot feltételező modellek által jósolt M - R diagramok kívül esnek a bevezető 1.4. ábráján megadott, mérések által megengedett sávon. Ez a körülmény nem zárja ki azonban teljesen a modelleket, ugyanis a mérések jelenlegi érzékenysége mellett a neutroncsillagok sugarának mérése nagy kihívást jelent, ezért különböző módszerek kicsit különböző eredményekre vezetnek. Termonukleáris kitörésekre alapozott vizsgálatok például 7–15km közötti határokat adnak meg a lehetséges neutroncsillag-sugár értékekre [20].

- Az aszimmetrikus maganyagból álló neutroncsillagok maximális tömege 1–3 %-al megnő a szimmetrikus maganyagból állókéhoz képest. Ez a hatás közelítőleg egy nagyságrenddel kisebb, mint az aszimmetria maximális sugárra gyakorolt hatása, ami jól mutatja a neutroncsillag-sugár mérések fontosságát az álarc probléma vizsgálatában és a modellek szelekciójában.
- Jól látható, hogy bár az a maganyag aszimmetriájának figyelembevétele jelentősen módosítja az M - R diagramokat ez a változás a különböző modellekre nézve konzisztens. Ez azt jelenti, hogy ha két modell M - R görbéje közel haladt egymáshoz a szimmetrikus esetben, akkor a β -egyensúly figyelembevétele után, az aszimmetrikus esetben is közel haladnak. Ez azt sejteti, hogy a szimmetrikus esetben a 4.1.2. fejezetben megállapított összefüggések a maganyag mikroszkópikus paraméterei és a neutroncsillagok megfigyelhető mennyiségei között az aszimmetrikus esetekben is kvalitatíve fennállnak.

4.2.3. A neutroncsillagok tulajdonságai és az aszimmetrikus maganyag mikroszkópikus paraméterei

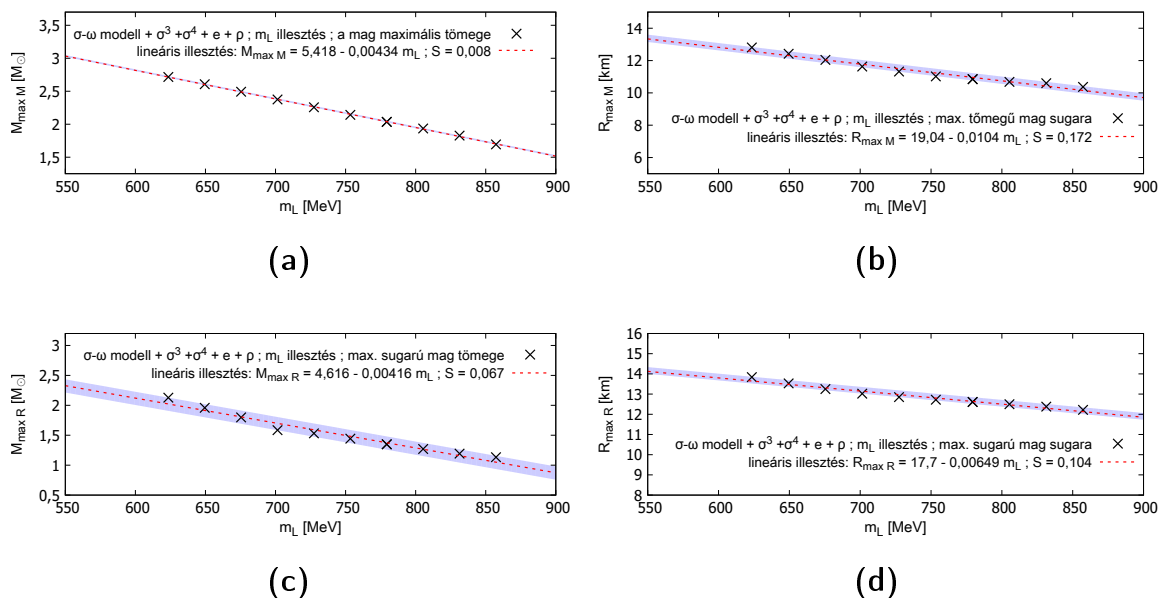
A 4.1.2. fejezetben azt vizsgáltam, hogy a neutroncsillagok maximális tömege hogyan változik, ha a σ - ω modellben az illesztéshez használt paraméterek értéke megváltozik. Vizsgálataim során az effektív nukleon tömeg és a maganyag kompressziómodulusának változtatásával okozott hatásokra koncentráltam, és azt találtam, hogy a neutroncsillagok maximális tömege egy nagyságrenddel jobban érzékeny a nukleonok effektív tömegének változására, mint a kompressziómodulus változtatására. A 4.8. ábrán látható, hogy az aszimmetrikus maganyaghoz tartozó állapotegyenletek, konzisztens módon változnak meg a szimmetrikus megfelelőikhez képest, várható, hogy a 4.1.2. fejezetben kapott eredmények kvalitatív módon az aszimmetrikus anyag esetén is teljesülnek.

Ezen hipotézis ellenőrzésére elvégeztem a 4.1.2. fejezetben leírt vizsgálatot aszimmetrikus maganyag esetére is. Vizsgálataimat kiegészítettem azzal, hogy nem csak az effektív nukleon tömeg és a kompressziómodulus hatását elemeztem, hanem számításaimat kibővítettem az asszimmetria energia értékének változtatásával okozott hatások elemzésével is. Hogy jobban képet lehessen alkotni az M - R diagramon bekövetkező változásokról nem csak a neutroncsillagok maximális tömegének változását követtem nyomon, hanem az M - R diagram alábbi jellemzőinek viselkedését is:

- a maximális tömegű neutroncsillag M_{maxM} tömege,
- a maximális tömegű neutroncsillag R_{maxM} sugara,
- a maximális sugarú neutroncsillag M_{maxR} tömege,
- a maximális sugarú neutroncsillag R_{maxR} sugara.

Számításaimat a 4.1.2. fejezethez hasonlóan a σ - ω modell $U_{34}(\sigma)$ kölcsönhatási taggal kiegészített változatával végeztem el, és figyelembe vettem a β -egyensúly és az aszimmetria energia hatását a (4.48) Lagrange-függvénynek megfelelően. A modell illesztéséhez kiindulásként az 1.1. táblázatban található adatokat használtam, és a nukleon effektív tömeg értékének illesztésekor az m_L Landau-tömegre illesztettem modellt, mivel az így nyert maximális neutroncsillag tömeg a 4.8. ábrán látható módon közelebb esik a realisztikus tömeg és sugár adatokhoz [13, 20, 56]. Így a modell az 1.1. táblázatban lévő összes paraméter értékét reprodukálja, kivéve az effektív nukleon tömeget.

A Landau-tömeg változtatásának M - R diagramra gyakorolt hatásának vizsgálatához, elvégeztem a kiterjesztett σ - ω illesztését a Landau-tömeg több megváltoztatott értékére, úgy, hogy közben a többi paraméter értékét változatlanul hagytam. Mind-egyik illesztés esetében meghatároztam a modellhez tartozó állapotegyenletet, amit a TOV-egyenletekbe helyettesítve kiszámítottam az adott modell variánsra jellemző M - R diagramot. Az így kapott diagramok a kiszámításukhoz használt Landau-tömeg értékekkel címkézhetőek. Minden eredményül kapott diagramról leolvastam a maximális tömegű és sugarú neutroncsillag jellemzőit, amiket a Landau-tömeg adott diagramhoz tartozó értékének függvényében ábrázoltam. Az így kapott adatpontok jó közelítéssel egy egyenes mentén helyezkednek el, ezért a grafikonon lévő trend megállapításához minden esetben egyenest illesztettem az adatpontokra. Az adatok és a rájuk illesztett egyenesek a 4.9. ábrán láthatóak, az illesztések hibáját szemléltető sávokkal együtt. A szimmetrikus esethez hasonlóan (4.4. ábra) a maximális tömegű



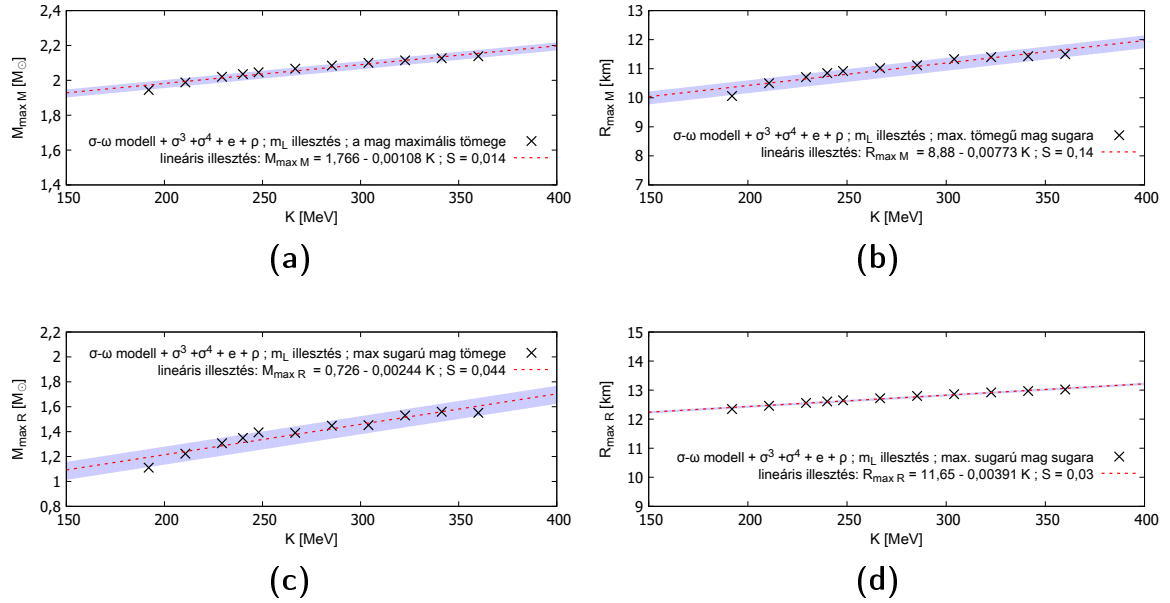
4.9. ábra. A neutroncsillagok paramétereinek függése a nukleonok m_L Landau-tömegétől az $U_{34}(\sigma)$ kölcsönhatási taggal kiegészített aszimmetrikus σ - ω modellben. A felső két panelen a maximális tömegű, az alsó kettőn pedig a maximális sugarú neutroncsillag tömegére és sugarára vonatkozó adatok láthatóak. Az illesztések hibáját kék sáv szemlélteti a diagramokon, az illesztett egyenesek egyenlete mellett azok S standard eltérése is fel van tüntetve.

csillag esetén a lineáris illesztés jól írja le a neutroncsillagok tömegének és sugarának Landau-tömeg függését. A maximális sugarú csillagra a lineáris közelítés szintén jól

használható, de az illesztések hibája már nagyobb, mint a maximális tömegű csillag esetében.

- A maximális tömegű csillag tömegére vonatkozó illesztés a legjobb, a vonalvastagságnál is kisebb hibával, míg a maximális sugarú csillag tömegére vonatkozó illesztés rendelkezik a legnagyobb hibával.
- Összességében elmondható, hogy a nukleonok Landau-tömegének növelése ugyanúgy hat a maximális tömegű és a maximális sugarú neutroncsillag paramétereire: mindkét esetben a csillagok tömege és sugara jelentős mértékben csökken ha a Landau-tömeg nő, jó közelítéssel lineáris módon.

A Landau-tömegre vonatkozó vizsgálatokhoz hasonlóan elvégeztem a számításokat a kompressziómodulus változtatásával is. Az eljárás megegyezik a Landau-tömeg esetében követett módszerrel, csak itt a kompressziómodulus különböző értékeire kell illeszteni a σ - ω modellt, miközben a többi paraméter az 1.1. táblázatban adott állandó értéken marad. Az így kapott modellekre ugyanúgy kiszámítottam az M - R diagramokat és leolvastam a diagramokról a maximális tömegű és sugarú neutroncsillag adatait. Az eredmény a 4.10. ábrán látható. A 4.5. ábrán bemutatott szimmetrikus



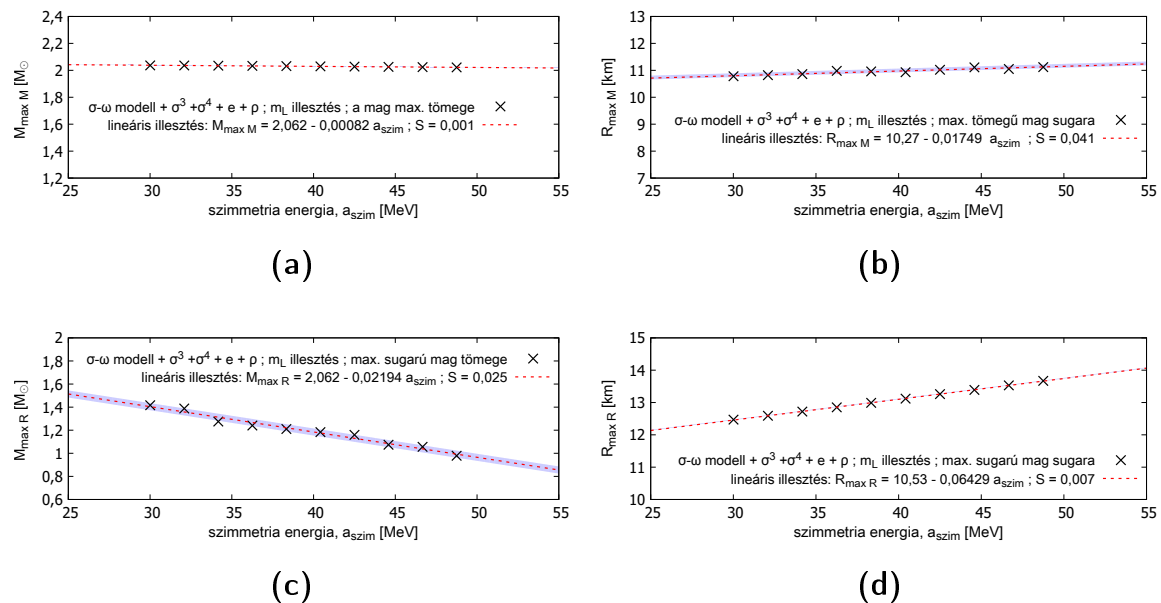
4.10. ábra. A neutroncsillagok paramétereinek függése a maganyag K kompressziómodulusától az $U_{34}(\sigma)$ kölcsönhatási taggal kiegészített aszimmetrikus σ - ω modellben. A felső két panelen a maximális tömegű, az alsó kettőn pedig a maximális sugarú neutroncsillag tömegére és sugarára vonatkozó adatok láthatóak. Az illesztések hibáját kék sáv szemlélteti a diagramokon, az illesztett egyenesek egyenlete mellett azok S standard eltérése is fel van tüntetve.

esethez hasonlóan az aszimmetrikus maganyag esetén is jó közelítés a lineáris illesztés a maximális tömegű neutroncsillagra. A maximális sugarú csillag paramétereit szintén jó közelítéssel lineárisan függnek a kompressziómodulustól.

- A Landau-tömegnél elmondottakhoz hasonlóan most is a maximális sugarú csillag sugarára vonatkozó illesztés hibája a legnagyobb, azonban jelen esetben a maximális sugarú neutroncsillag sugarára vonatkozó illesztés a legpontosabb.

- A maganyag kompressziómodulusának változtatása ugyanolyan hatást gyakorol a maximális tömegű, és a maximális sugarú csillag tulajdonságaira: a kompressziómodulus növekedése kis mértékben növeli a csillagok tömegét és sugarát.

Végül megvizsgáltam az asszimmetria energia értékének hatását az M - R diagramra is a kiterjesztett σ - ω modellben. Az eljárás megegyezik a Landau-tömeg és a kompressziómodulus esetében leírtakkal, csak ebben az esetben a modell illesztését az asszimmetria energia különböző értékeire kell elvégezni. Az eredményeket a 4.11. ábra mutatja.



4.11. ábra. A neutroncsillagok paramétereinek függése a maganyag a_{szim} szimmetria energiától az $U_{34}(\sigma)$ kölcsönhatási taggal kiegészített aszimmetrikus σ - ω modellben. A felső két panelen a maximális tömegű, az alsó kettőn pedig a maximális sugarú neutroncsillag tömegére és sugarára vonatkozó adatok láthatóak. Az illesztések hibáját kék sáv szemlélteti a diagramokon, az illesztett egyenesek egyenlete mellett azok S standard eltérése is fel van tüntetve.

A Landau-tömeghez és a kompressziómodulushoz hasonlóan a szimmetria energia hatása is jól leírható lineáris közelítéssel. A másik két esethez hasonlóan a maximális tömegű csillag tömegére való illesztés a hibája a legkisebb, és a maximális sugarú csillag tömegére való illesztés hibája a legnagyobb.

- A 4.11. ábrán látható, hogy a maximális tömegű csillag tömege jó közelítéssel független az a_{szim} szimmetria energia értékétől.
- A maximális tömegű és maximális sugarú csillag sugara kis mértékben nő ha a_{szim} nő.
- A maximális sugarú csillag tömege másként viselkedik, mint a maximális tömegű csillag tömege: a szimmetria energia értékének növekedésével csökken.

Az eredmény, hogy maximális csillagtömeg jó közelítéssel független a szimmetriaenergia értéktől első látásra ellentmond a 4.8. ábrán látható M - R diagramokból

levont következtetéssel, ahol a szimmetrikus és aszimmetrikus maganyaghoz tartozó M - R diagramok maximuma észrevehető különbség van. Ez nem jelent igazi el-
lentmondást, ugyanis a 4.11. ábrán látható eredmények csak azt jelentik, hogy a maximális csillagtömeg érzéketlen az a_{szim} paraméter konkrét értékére bizonyos határok között, és nem azt, hogy az asszimmetriával kapcsolatos tagok figyelembevétele a (4.48) Lagrange-függvényben nincs hatással a modellhez tartozó állapotegyenletre. Ezek az eredmények összefoglalva azt jelentik, hogy a kiterjesztett σ - ω modellben a maximális csillagtömeg mért értékének reprodukálásához nincs szükség az a_{szim} paraméter nagy pontosságú ismeretére elég a modellben a β -egyensúly figyelembe venni.

A 4.1.2. fejezetben megmutattam, hogy szimmetrikus esetben körülbelül egy nagyságrenddel erősebben függ a maximális csillagtömeg az m_L Landau-tömeg értékétől, mint a kompressziómodulustól. Ahhoz, hogy a paraméterek M - R diagramra gyakorolt hatása között hasonló összefüggést lehessen felállítani össze kell hasonlítani az illesztett egyenesek meredekségét. Az illesztett egyenesek meredeksége azonban nem hasonlítható össze közvetlenül, mert mértékegységük különbözik. Az összehasonlításhoz dimenziótlantítani kell a független változókat mindhárom esetben, az alábbi módon: minden illesztett egyenes meredekségét meg kell szorozni az illesztett egyenes független változóját jelentő fizikai mennyiség szaturációs pontban felvett értékével. Ennek megfelelően például 4.9. ábrán látható, Landau-tömeg változtatásával kapott egyenesek meredekségét a Landau-tömeg 1.1. táblázatban megtalálható értékével kell szorozni. Ez az eljárás tulajdonképpen annak felel meg, hogy az egyenes leíró függvényben egy változócsere-t hajtunk végre, és a független változót innentől kezdve az adott fizikai mennyiség szaturációs pontban felvett értékében mérjük:

$$f(x) = ax + b \xrightarrow{x' = \frac{x}{x_0}} f(x) = (ax_0) \left(\frac{x}{x_0} \right) + b = a'x' + b \quad (4.61)$$

$$a' = ax_0,$$

ahol a az eredeti egyenes (dimenziós) meredeksége, x az adott fizikai mennyiség értéke: m_L , K vagy a_{szim} , a' a dimenziótlantított meredekség x' pedig az adott fizikai mennyiségnek a szaturációs pontban felvett értékében mért értéke. Ezek után az átalakítások után az egyenes tulajdonságai már összehasonlíthatóak, mert az x' értékének változása azt méri, hogy mekkora az adott fizikai mennyiség relatív változása a szaturációs pontban felvett értékéhez képest. Azaz, ha $x' = 0,8$ az azt jelenti, hogy az adott fizikai mennyiség a szaturációs pontban felvett értékénél 20 %-al kisebb. Az dimenziótlantított meredekség azt mondja meg, hogy vizsgált paraméter relatív változása mekkora mértékben változtatja a neutroncsillagok tömegét illetve sugarát. Ezzel az átskálázással a különböző paraméterek hatása az M - R diagramra objektíven összevethető. Ehhez az átskálázott változókhoz tartozó egyenesek adatait a 4.3. táblázatban foglaltam össze.

A maximális tömegű csillagokra vonatkozó a' átskálázott meredekséget összeha-

maganyag paramétere		Landau-tömeg, m_L					
csillag típusa	illesztési paraméterek	maximális tömegű neutroncsillag			maximális sugarú neutroncsillag		
		a'	b	S	a'	b	S
	tömeg-függés	-3,38	5,42	0,008	-3,24	4,62	0,067
	sugár-függés	-8,1	19,04	0,172	-5,05	17,7	0,104

maganyag paramétere		kompressziómodulus, K					
csillag típusa	illesztési paraméterek	maximális tömegű neutroncsillag			maximális sugarú neutroncsillag		
		a'	b	S	a'	b	S
	tömeg-függés	0,26	1,77	0,014	0,59	0,73	0,044
	sugár-függés	1,86	8,88	0,14	0,94	11,65	0,03

maganyag paramétere		szimmetria energia, a_{szim}					
csillag típusa	illesztési paraméterek	maximális tömegű neutroncsillag			maximális sugarú neutroncsillag		
		a'	b	S	a'	b	S
	tömeg-függés	0,027	2,06	0,001	-0,71	2,06	0,025
	sugár-függés	0,57	10,27	0,041	2,09	10,53	0,007

4.3. táblázat. A 4.9., a 4.10. és a 4.11. ábrán látható illesztett egyenesek átskálázott illesztési paraméterei. Az S az illesztésekhez tartozó standard eltérés.

sonlítva a különböző paraméterek esetére az alábbi következtetések vonhatóak le:

- A szimmetrikus maganyaghoz hasonlóan itt is teljesül, hogy körülbelül egy nagyságrenddel erősebb a kapcsolat a maximális csillagtömeg és a Landau-tömeg között, mint a maximális csillagtömeg és a kompressziómodulus között.
- Az a_{szim} paraméterrel történő összehasonlítás hasonló eredményre vezet: a szimmetria energia értéke még a kompressziómodulusnál is egy nagyságrenddel kisebb mértékben hat a maximális neutroncsillag tömegre.
- A maximális tömegű csillag sugarára nézve szintén teljesül, a három vizsgált paraméter fentebb említett hierarchiája: legerősebben a Landau-tömegtől függ, a kompressziómodulus már kisebb mértékben befolyásolja az értékét, és a szimmetria energia hatása a legkisebb. Az tömegre vonatkozó esettel ellentétben itt már nincs olyan nagy különbség az egyenesek átskálázott meredekségei között, a Landau-tömeg függés nem dominálja olyan mértékben a sugár értékét, mint a tömegét. Ez a tény jelzi a neutroncsillagok sugarára vonatkozó mérések fontosságát, ugyanis a sugár értékének kialakításában több mikroszkópikus paraméter kap szerepet.
- A maximális sugarú neutroncsillag tömegét is jóval nagyobb mértékben befolyá-

solja a Landau-tömeg mint a másik két paraméter, azonban, már nincs akkora különbség a kompressziómodulus és a szimmetriaenergia hatása között.

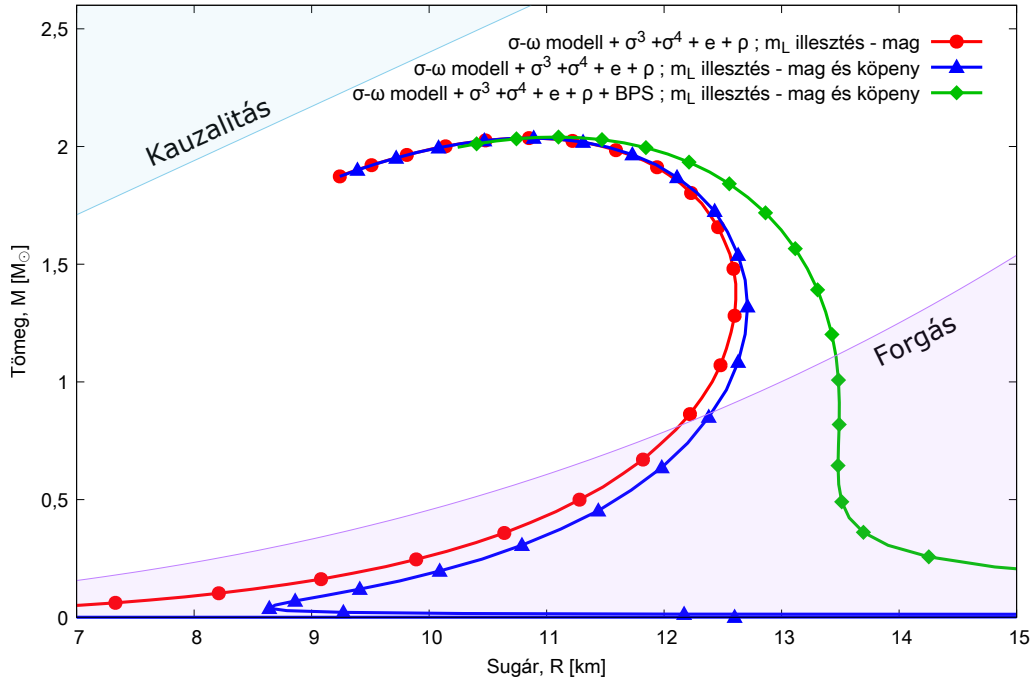
- A maximális sugarú neutroncsillag sugarára nézve hasonlóak mondhatók el: A Landau-tömeg értéke a legjelentősebb, de a másik két mennyiség szerepe sokkal jelentősebb, mint a maximális tömeg esetében.

A fentiekből levonható a következtetés, hogy az álarc probléma a mikroszkópikus paraméterek szempontjából a maximális csillagtömeg esetében a legerősebb. A σ - ω modellben a Landau-tömeg értéke olyan mértékben dominálja ennek a paraméternek a viselkedését, hogy a maximális csillagtömeg mérésével nehéz bármely másik paraméter értékét megszorítani. Ez a helyzet más modellekben is előfordulhat ezért a modellek illesztése előtt érdemes megvizsgálni, hogy mely paraméterekre érzékenyek a neutroncsillagok tulajdonságai. A helyzet korántsem ennyire szélsőséges a csillag sugarát érintő esetekben, ami alapján feltételezhető, hogy az álarc probléma jelentősen gyengíthető a neutroncsillagok sugarára vonatkozó ismeretek birtokában.

4.2.4. A kéreg állapotegyenletének hatása az M - R diagramra

A 4.2.3. fejezetben bemutattam, hogy a kiterjesztett aszimmetrikus σ - ω modell paramétereire nézve az álarc probléma a maximális csillagtömeg esetében a legerősebb. Vizsgálataimhoz a csillag magjára vonatkozó konzervatív számítási módszert alkalmaztam, és elhanyagoltam a csillag kérgét leíró állapotegyenlet hatását. A 4.2.2. fejezetben elmondottaknak megfelelően a kéreg állapotegyenletének hatása a kisebb tömegű csillagok esetében várhatóan jelentősebb. A 4.2.3. fejezet eredményei alapján szintén az várható, hogy a maganyag paramétereinek értékére várhatóan könnyebben következtethetünk a maximális sugarú, így kisebb tömegű neutroncsillagokra vonatkozó mérésekből. Számos neutroncsillag-modellt figyelembe vevő statisztikai vizsgálatok szintén arra vezetnek, hogy a kisebb tömegű neutroncsillagokra vonatkozó több információt nyújthatnak a modellalkotás szempontjából [89].

A fentiek miatt megvizsgáltam, hogy mekkora korrekciót okoz a maximális sugarú csillag adataira nézve, ha a TOV-egyenletek integrálása során figyelembe vesszük a neutroncsillag kérgének hatását is egy realiztikus állapotegyenleten keresztül. Ehhez a kiterjesztett aszimmetrikus σ - ω modell $U_{34}(\sigma)$ kölcsönhatási taggal kiegészített, Landau-tömegre illesztett változatát használtam. A modellhez tartozó TOV-egyenletek három módon oldottam meg. Először a szokásos módon a σ - ω modell állapotegyenletét használva a csillag magjában és kérgében is. Másodszor a 4.2.2. fejezetben leírt konzervatív becslésnek megfelelően a TOV-egyenletek integrálását leállítottam a csillag magjának határánál. A harmadik esetben a csillag magjának határán áttértem a BPS állapotegyenlet használatára és a kéreg szerkezetének meghatározását, már ezzel folytattam [88]. Mindhárom számítás eredménye a 4.12. ábrán látható. A várakozásoknak megfelelően a magra vonatkozó becslés adja a legkisebb



4.12. ábra. A σ - ω modell $U_{34}(\sigma)$ kölcsönhatási taggal kiegészített, Landau-tömegre illesztett variánsához tartozó M - R diagramok a TOV-egyenlet három különböző megoldása esetén. A neutroncsillagok magjának határáig történő integráláshoz tartozó megoldás (piros kör), a neutroncsillag kérgének határáig történő integráláshoz tartozó megoldás (kék háromszög) és a kéreg esetében a BPS állapotegyenlet felhasználásával meghatározott megoldás (zöld rombusz) szintén fel van tüntetve [88].

neutroncsillag sugár-értékeket, míg a σ - ω modell állapotegyenletét a neutroncsillag kérgének határáig felhasználó módszerhez már nagyobb neutroncsillag-sugár értékek tartoznak. A BPS állapotegyenletet felhasználása jelentős mértékben módosítja a kisebb tömegű neutroncsillagok sugarát. Ez új problémát vet fel a maganyag paramétereinek asztrofizika mérések alapján történő vizsgálatában, ugyanis előfordulhat, hogy a neutroncsillag kérgét leíró állapotegyenlet módosító hatása elfedi a magra vonatkozó információkat. A kompressziómodulus és a szimmetria energia M - R diagramot módosító hatása ott érvényesül a legjobban ahol a kéreg állapotegyenletéi is. Az is látható a 4.12. ábrán, hogy a kéregre használt állapotegyenlet hatása elhanyagolható a maximális tömegű csillag paramétereinek szempontjából. Ez azt jelenti, hogy a maganyag állapotegyenletének nagy sűrűségű része a maximális tömegű csillagra vonatkozó mérésekkel szorítható meg a legjobban. A maximális tömegű csillag tömegének és sugarának mérése egyaránt fontos, ugyanis a 4.3. táblázatban látható módon a sugárra vonatkozó adatokban már nem jellemző egy paraméter dominanciája, ezért várhatóan jobban megszoríthatók egyre pontosabb mérésekkel.

A dolgozatom első felében megbecsültem, hogy a maganyag kvantumtermészetének figyelembevétel mekkora változást okoz a modellek által jósolt M - R diagramokon. A maximális neutroncsillag-tömeget illetően az effektus 2–3% nagyságrendű, ami nagyobb hatás, mint a neutroncsillag kérgét leíró kis sűrűségű állapotegyenlet figyelembevétel, és közel hasonló nagyságrendű eltérés, mint a β -egyensúly és az aszimmetria energia figyelembevétel az állapotegyenletben. A 4.3. táblázatra

tekintve könnyen látható, hogy a K kompressziómodulus 15–20 %-os megváltozása okoz egy $2 M_{\odot}$ tömegű neutroncsillag esetében akkora változást a maximális tömegben, mint a kvantumfluktuációk. A σ - ω modellre vonatkozó vizsgálatok megerősítik tehát, hogy a kvantumfluktuációk hatása jelentős szerephez jut a neutroncsillagok mérhető mennyiségeinek tanulmányozásában az egyre pontosabbá váló asztrofizikai méréseknek köszönhetően [83].

Összefoglalva elmondható, hogy az állapotegyenlet nagy sűrűségű részének tanulmányozásához a maximális tömegű csillagokra vonatkozó minél pontosabb adatokra van szükség, míg a kéregben érvényes kisebb sűrűségű részről a kisebb tömegű, maximális sugarú csillagok hordoznak több felhasználható információt. Ezek, a kiterjesztett σ - ω modell vizsgálata alapján levont következtetések, kvalitatívan megegyeznek a számos maganyag modellt vizsgáló statisztikai elemzések eredményével [89]. A σ - ω modellben az M - R görbe alakját és a maximális neutroncsillag tömeget a nukleonok maganyagon belüli, effektív tömege nagy mértékben befolyásolja. Más modellekre vonatkozó vizsgálatokban is hasonló viselkedés tapasztalható, így feltételezhető, hogy ez nem csak a σ - ω modell jellemzője, hanem általánosabb jelenség [90, 91]. A σ - ω modellre vonatkozó vizsgálatomban végigkövethető, hogy a paraméterek viselkedése hogyan vezet a fentebb említett következtetésekre, és így utat mutathat a álarc probléma kezeléshez a vizsgálatok és a modellalkotás során.

5. fejezet

Összefoglalás

Kutatásom során térelméleti módszereket használtam a neutroncsillagok hideg sűrű maganyagának vizsgálatára. Dolgozatomban bemutatott kutatómunkám közép-pontjában a neutroncsillagok modellezése és a megfigyelések kiértékelése során nagy kihívást jelentő álarc probléma állt: különböző nukleáris modellek állapotegyenletei gyakran vezetnek hasonló megfigyelhető paraméterekkel rendelkező neutroncsillagokhoz. A megfigyelések elemzése, kiértékelése során gyakran szükség van magára a maganyag állapotegyenletére is, ezért általában több modellt és különböző paraméterezéseket felhasználva végzik el az elemzést [57, 82]. Az ilyen vizsgálatokban az álarc probléma elkerülhetetlenül szerephez jut, megnehezítve a kompakt objektum valódi állapotegyenletének meghatározását.

Vizsgálataimat két fő irányvonal mentén végeztem. A dolgozat első részében a funkcionális renormálási csoport (FRG) módszert alkalmaztam, mely segítségével megmutattam, hogy az álarc probléma fennáll akkor is, ha csak egy modellt vizsgálunk. Ennek oka, hogy különböző közelítéseket használhatunk a téregyenletek megoldására. A kvantumfluktuációk különböző rendű figyelembevételével más-más eredményre vezet ugyanazon modellen belül, amik a különböző fizikai mennyiségek esetén különböző mértékű korrekciókat okoznak.

A 2. fejezetben bemutattam az általam kidolgozott módszert a fermionikus FRG egyenletek megoldására a neutroncsillagok hideg maganyagát jellemző véges kémiai potenciálon és zéró hőmérsékleten [2]. A módszer segítségével megbecsülhető a kvantumfluktuációk nagysága a neutroncsillagok modellezésére használt effektív magmodellekben lokális potenciál közelítést használva.

Nulla abszolút hőmérsékleten a Fermi-eloszlásfüggvény lépcsőfüggvényként viselkedik, ezért nem folytonos függvényként lép be a numerikus megoldásba. Ez a megoldás elvesztéséhez vezethet, mert a numerikus deriváltak nem jól definiáltak a lépcsőfüggvény által bevezetett ugrások miatt. Az általam javasolt módszer lényege, hogy a Fermi-felület által definiált határvonal alatt és felett külön-külön megoldást keresni, mert ezeken a tartományokon a lépcsőfüggvénynek nincs ugrása, és alkalmazhatók a hagyományos módszerek. A Fermi-eloszlásfüggvény által bevezetett

szakadás úgy jelenik meg, hogy a fentebb említett két tartományon a megoldások nem függetlenek, az egyik megoldás adja a másik kezdeti feltételét.

A 3. fejezetben ezt a módszert alkalmaztam az általam vizsgált Yukawa-model esetére. Levezettem és megoldottam az effektív potenciál futására vonatkozó egyenleteket. Bemutattam a kvantumfluktuációk hatását a modell fázisdiagramjára és az állapotegyenletére nézve, az eredmények átlagtér és egyhurok számolásokkal való összehasonlításával [1–3]. Ezeket az eredményeket felhasználva megvizsgáltam a kvantumfluktuációk hatását az álarc problémára nézve. Kiszámítottam a neutroncsillagok tulajdonságait a Yukawa-modell állapotegyenletének háromféle közelítésében: átlagtér, egyhurok és az FRG LPA eredményeket használva. A különböző közelítések használata a neutroncsillagok állapotegyenletét 10–20 %-al, megfigyelhető tulajdonságaikat, például maximális tömegüket 2–3 %-al módosítják. Ezzel együtt a Yukawa-modell fázisdiagramján az átlagtér közelítés és az FRG LPA számolás eredménye között 20–30 % különbség tapasztalható. Ezek az eredmények jól mutatják, hogy a kvantumfluktuációk, hogyan vezetnek az álarc problémához: az eredmények közötti különbségek a neutroncsillagok adatai esetén a legkisebbek. Említésre méltó tulajdonsága a megoldásoknak, hogy a különböző rendű közelítések nem minden fizikai mennyiség esetén tartják meg egymáshoz való viszonyukat: míg a fázis diagram vizsgálata során az egyhurok közelítés pontosabb volt mint az átlagtér, addig a neutroncsillagok M - R diagramja esetén pont fordított a helyzet. Ez az eredmény arra hívja fel a figyelmet, hogy a magas rendű nemperturbatív módszerek, mint például az FRG, fontos szerepet játszanak az álarc probléma konzisztens kezelésében. A fenti eredményeket összevettem a modern asztrofizikai mérések pontosságával, és megállapítottam, hogy a radiatív korrekciók által okozott hatások a jelenleg elérhető mérési pontosság közelében vannak, ezért a jövőben vizsgálatuk fontos szerephez juthat [5].

Doktori munkám második felében az álarc problémát fenomenológia oldalról vizsgáltam. Azt vizsgáltam, hogy effektív maganyag modellek egy adott típusában mely mikroszkópikus paraméterek milyen mértékben befolyásolják a modellből származtatott neutroncsillagok mérhető paramétereit. A 4. fejezetben a kibővített σ - ω modell különböző paraméterezéseinek következményeit vizsgáltam. A szimmetrikus és az aszimmetrikus maganyag esetén is elvégeztem a vizsgálatokat, hogy a β -egyensúly és a szimmetria energia hatását is vizsgálhassam. Megállapítottam, hogy a neutroncsillagok megfigyelhető paraméterei az effektív nukleon tömeg értékre a legérzékenyebbek. Mindemellett a maganyag kompressziómodulusának és szimmetria energiájának a maximális csillagtömegre gyakorolt hatása egy, illetve két nagyságrenddel kisebb, mint az effektív nukleon tömegé [6]. A kompressziómodulus és a szimmetriaenergia hatása legjobban a neutroncsillagok maximális sugarának értékében nyilvánul meg, azonban az M - R diagram ezen tartományán a neutroncsillagok kergét leíró állapotegyenlet hatása elkendőzheti a nagy sűrűségű maganyag paramétereinek hatását. A három vizsgált mikroszkópikus paraméter hatása minden esetben jó közelítéssel li-

neáris a paraméterek széles tartományán belül. A radiatív korrekciókra vonatkozó eredményekkel összehasonlítva a fentieket, látható, hogy a kvantumfluktuációk neutroncsillagok mérhető paramétereire gyakorolt hatása tipikusan azonos nagyságrendű a kompressziómodulus és a szimmetriaenergia hatásával. Eszerint a kvantumkorrekciók hatása nem hanyagolható el a vizsgálatok során.

A fentebb elvégzett vizsgálat a σ - ω modell konkrét példáján keresztül szemlélteti, hogy hogyan alakulhat ki az álarc probléma effektív modellek esetén a paraméterek együttes hatása miatt. Elemzésem bemutatja milyen mechanizmusok húzódnak meg a statisztikus úton megkapott hasonló eredmények mögött [89]. Az álarc probléma megjelenéséhez vezet, ha egy mikroszkópikus paraméter a többinél jóval nagyobb mértékben befolyásolja az állapotegyenlet azon jellemzőit amire a Tolman – Oppenheimer – Volkov-egyenletek megoldása érzékeny. Mivel az M - R diagram különböző tartományai más és más mikroszkópikus paraméterekre érzékenyek, az álarc probléma vizsgálatában és feloldásában fontos szerepe van a modern méréseknek, amik nem csak a neutroncsillagok tömegét hanem sugarát is nagy precizitással képesek mérni [20, 26, 83].

A fenti tudományos eredményeimet az alábbi tézispontokban foglaltam össze:

- I** Kidolgoztam egy általános eljárást fermionikus funkcionális renormálási csoport egyenletek megoldására LPA közelítésben nulla hőmérsékleten és véges kémiai potenciálon. A megoldás során a paraméterteret két tartományra kell bontani, melyeket a Fermi–Dirac-eloszlásfüggvény határoz meg, majd ezeken a tartományokon külön-külön megoldani az ott érvényes FRG egyenleteket, peremfeltételként felhasználva, hogy a tartományok határán a megoldásoknak egyezniük kell [1, 2].
- II** Az előző pontban kifejtett módszert alkalmaztam egy egy-fermion – egy-bozon Yukawa-modell esetében. Kidolgoztam a modell esetén érvényes FRG egyenleteket, és megvizsgáltam az effektív potenciál és együtthatóinak futását véges kémiai potenciálon. Meghatároztam a modell fázisdiagramját nulla hőmérsékleten és véges kémiai potenciálon. Eredményeimet összehasonlítottam a modellre vonatkozó átlagtér és egy-hurok közelítésekkel. Megállapítottam, hogy a maganyag mikroszkópikus tulajdonságainak és a neutroncsillagok makroszkópikus paramétereinek kielégítő pontosságú leírásához magasabb rendű közelítés szükséges [2].
- III** Megvizsgáltam a kvantumkorrekciók hatását a Yukawa-model állapotegyenletére nézve, és összehasonlítottam az átlagtér valamint egy hurok számolásokkal. Renormálási feltételként felhasználtam, hogy nagyon kicsi és extrém nagy sűrűségek esetén a futó csatolási állandók meggyeznek az átlagtér közelítésben használt értékekkel. Megoldottam a TOV-egyenleteket

mindhárom esetben, és az egyenletek kezdeti feltételeit változtatva meghatároztam a lehetséges neutroncsillag konfigurációkat, az M - R diagramot. Az eredményeket összehasonlítottam más modellek jóslataival [3, 4].

- IV Megvizsgáltam, hogy a kvantumkorrekciók mekkora bizonytalanságot jelentenek a neutroncsillagok kompaktságra nézve ami gravitációs hullámokkal és pulzár időmérésekkel meghatározható paraméter. Az eltérések nagyságrendje maximum 5% a vizsgált három közelítés esetében. Ezt összehasonlítottam a jelenleg elérhető asztrofizikai mérések érzékenységiével és megállapítottam, hogy a mérések érzékenysége határán van. Megállapítottam, hogy a legnagyobb relatív korrekciókat a maximális tömegű és sugárú neutroncsillagok esetén kapjuk [5].
- V Meghatároztam a neutroncsillag maganyagának állapotegyenletét β -egyensúlyban lévő elektronok és a kiterjesztett σ - ω modell felhasználásával többféle paraméterezés és modellvariáns esetén. Ezt összehasonlítottam a szimmetrikus maganyagra vonatkozó jóslatokkal. Megállapítottam, hogy a maximális tömegű és sugárú csillagok tömege és sugara széles paramétertartományon jó közelítéssel lineárisan függ a nukleon effektív tömeg értékétől, a kompresszibilitástól és az asszimmetria energia tagtól. Az eredményeket összehasonlítva bemutattam, hogy a maximális csillag tömeg egy nagyságrenddel érzékenyebb a nukleon effektív tömeg értékére, mint a másik két paraméter változására. A jelenlegi mérési pontosság mellett ez azt jelenti, hogy elég csak az effektív nukleon tömeg paramétert tekinteni a neutroncsillagok maximális tömegének meghatározásakor. Ezt felhasználva bemutattam, hogyan használhatók fel a neutroncsillag tömeg mérések a nukleon effektív tömeg meghatározására [6].

Eredményeim elősegítették az álarc probléma mélyebb megértését azzal, hogy konkrét példákon keresztül bemutattam a jelenség kialakulását az általam vizsgált modellekben. Számításaim megerősítik a kialakulóban lévő szakmai konszenzust, miszerint a neutroncsillagok tömegének és sugárjának precízebb mérésével jelentős előrelépés érhető el a neutroncsillagok modellezésében és az álarc probléma kezelésben. A funkcionális renormálási csoport egyenletek általam javasolt megoldási módszerét felhasználva bemutattam, hogy nagy pontosságú megfigyeléseknél a maganyag kvantumfluktuációi jelentős szerephez jutnak már a tömeg és a sugár mérése esetén is. A fenomenologikus σ - ω modellt felhasználva bemutattam, hogy a maganyag illesztett effektív paramétereinek bizonytalansága hogyan befolyásolja a neutroncsillagok megfigyelhető tulajdonságait. Vizsgálataim hozzájárultak a neutroncsillagok modellezésével kapcsolatos alapvető kérdések tisztázásához és a funkcionális renormálási csoport módszer elterjedéséhez a neutroncsillagok vizsgálatának multidiszciplináris területén.

A. függelék

A Wetterich-egyenlet levezetése

A levezetés során az alábbi jelöléseket követjük a generátorfukcionál jobb és bal oldali deriváltjaira nézve:

$$\frac{1}{Z_k} \left(Z_k \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial J_{a_1}} \cdots \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial J_{a_n}} \right) = \langle \Psi(x_1) \cdots \Psi(x_n) \rangle_J \quad (\text{A.1})$$

A bal oldali deriváltak esetében figyelembe kell venni, hogy J_a és a hozzá tartozó Ψ_a bozonikus vagy fermionikus szabadsági fok:

$$\frac{1}{Z_k} \left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial J_{a_1}} \cdots \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial J_{a_n}} Z_k \right) = \alpha_{a_1} \cdots \alpha_{a_n} \langle \Psi(x_1) \cdots \Psi(x_n) \rangle_J \quad (\text{A.2})$$

Az effektív hatás skálafüggésének meghatározásához induljunk ki a skálafüggő generátorfukcionálból,

$$\partial_k Z_k[J] = -\frac{1}{2} \partial_k R_{k,cd} \left(Z_k[J] \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial J_c} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial J_d} \right). \quad (\text{A.3})$$

Az 1.2.1. térelméleti bevezetőben említettek szerint az effektív hatás a $W[J]$ Schwinger-fukcionál Legendre-transzformáltja, (1.45) egyenlet, ezért először át kell térnünk a generátorfukcionálról a Schwinger-fukcionálra. A Schwinger-fukcionál Az (1.43) definícióját behelyettesítve az (A.3) kifejezésbe és elvégezve a funkcionális deriváltakat, majd a skála szerinti deriválást a bal oldalon, alábbi egyenletet kapjuk:

$$\partial_k W = -\frac{1}{2} \partial_k R_{k,cd} \left[W_{0,cd}^{(0,2)} + W_{0,c}^{(0,1)} W_{0,d}^{(0,1)} \right]. \quad (\text{A.4})$$

Az eredményhez figyelembe vettük, hogy a regulátor tag bevezetése miatt a Scwhinger-fukcionál is skálafüggő. A funkcionális deriváltak elvégzéséhez felhasználtuk, hogy

:

$$Z_k \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial J_a} = W[J] \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial J_a} e^{W[J]} = W[J]_{0,a}^{(0,1)} Z_k \quad (\text{A.5})$$

A térelméleti bevezetőben említetteknek megfelelően át kell térnünk az effektív hatás használatára, de a skálafüggés miatt itt ezt az (1.45) egyenlet alapján bevezetett, módosított Legendre-transzformáció alapján tesszük:

$$\Gamma_k[\psi] = \sup_J (\psi_a J_a - W[J]) - \frac{1}{2} R_{k,ab} \psi_a \psi_b. \quad (\text{A.6})$$

A Legendre-transzformációban szereplő „klasszikus mező” fermionikus esetben az (1.44) egyenlethez hasonlóan adódik:

$$\psi = \langle \Psi_a \rangle_J = W[J] \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial J_a}. \quad (\text{A.7})$$

$J = J_{\text{sup}}$ esetén az (A.6) egyenletet bal oldalról funkcionálisan deriválva az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \psi_c} \Gamma_k[\psi] = J_c + \alpha_{ac} \psi_a \left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \psi_c} J_a \right) - \left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \psi_c} J_a \right) \left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial J_a} W \right) - R_{k,cb} \psi_b, \quad (\text{A.8})$$

ahol felhasználtuk, hogy $\left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial J_a} W \right) = \alpha_{aa} \psi_a$ és, hogy

$$Z_k \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial J_a} = W[J] \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial J_a} e^{W[J]} = W[J]_{0,a}^{(0,1)} Z_k = \langle \Psi_a \rangle_J Z_k. \quad (\text{A.9})$$

A $c \rightarrow a$ index-átnevezés után és a k -függést elnyomva a következő kifejezésre jutunk:

$$J_a = \Gamma_{a,0}^{(1,0)} + R_{ab} \psi_b. \quad (\text{A.10})$$

Deriválva az (A.10) egyenletet a jobb oldalról, J_c szerint a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \delta_{ac} &= \left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \psi_c} \Gamma_k + R_{ab} \psi_b \right) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial J_c} = \\ &= \left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \psi_c} \Gamma_k + R_{ab} \psi_b \right) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \psi_d} \left(\psi_d \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial J_c} \right) = \\ &= \left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \psi_c} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \psi_d} + R_{ad} \right) W \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial J_d} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial J_c} = \\ &= \left(\Gamma_{a,b}^{(1,1)} + R_{ad} \right) W_{0,dc}^{(0,2)}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Az (A.11) egyenletben szereplő $\Gamma_{a,b}^{(1,1)}$ derivált a fluktuáció mátrix. Az (A.5) egyenletet még egyszer jobbról deriválva látható, hogy:

$$W_{0,dc}^{(0,2)} = \frac{1}{Z_k} \left(Z_k \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial J_{a_1}} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial J_{a_n}} \right) = \langle \psi_d \psi_c \rangle_J, \quad (\text{A.12})$$

ami a két-pont függvény, azaz a propagátor, $G_{k,dc}$. Ezekkel a jelölésekkel az (A.11) egyenlet a következő operátorazonosságot jelenti:

$$\mathbb{1} = \left(\Gamma_k^{(1,1)} + R_k \right) G_k, \quad (\text{A.13})$$

ahol az indexek jelölését elhagytam annak hangsúlyozására, hogy az azonosság operátorok szintjén teljesül.

Az (A.13) összefüggés segítségével áttérhetünk a Schwinger-funkcionálokról az effektív hatásra a G_k propagátoron keresztül, amit könnyen kifejezhetünk W deriváltjaival. A teljes áttéréshez a W Schwinger-funkcionál k skála szerint vett deriváltját kell eliminálnunk az egyenletekből. Ehhez vegyük az (A.6) módosított Legendre-transzformáció k skála szerinti parciális deriváltját, majd használjuk az eredményt és az (A.4) egyenletet arra, hogy $\partial_k W[J]$ elimináljuk. A deriválás során figyelembe kell venni, hogy W explicit módon és a J forrástagon keresztül is függ a k skálától. Az indexek megfelelő átnevezése után az alábbi eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} \partial_k \Gamma_k[\psi] + W \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial J_a} \partial_k J_a + \partial_k (-\psi_a J_a) + \frac{1}{2} R_{k,ab} \psi_a \psi_b = \\ = \frac{1}{2} \partial_k R_{k,ab} W_{0,ab}^{(0,2)} + \frac{1}{2} \partial_k R_{k,ab} W_{0,a}^{(0,1)} W_{0,b}^{(0,1)}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Az egyszerűbb írásmód kedvéért vezessük be a $\bar{\Gamma}_{a,b}^{(1,1)} = \Gamma_{a,b}^{(1,1)} + R_{ab}$ jelölést. Felhasználva az (A.7) összefüggést és az (A.13) operátor egyenletet látható, hogy

$$\bar{\Gamma}_{a,b}^{(1,1)-1} = W_{0,ab}^{(0,2)}. \quad (\text{A.15})$$

Az (A.15) egyenletet és a regulátor szimmetria tulajdonságát felhasználva, miszerint $R_{k,ab} = \alpha_{ab} R_{k,ba}$ az effektív hatás skálafüggésére olyan funkcionál differenciálegyenletet kapunk, ami csak az effektív hatást és deriváltjait tartalmazza:

$$\partial_k \Gamma_k[\psi] = \alpha_{ab} \frac{1}{2} \partial_k R_{k,ba} \bar{\Gamma}_{a,b}^{(1,1)-1} \quad (\text{A.16})$$

Az (A.16) egyenlet írható szemléletesebb mátrix alakban is:

$$\partial_k \Gamma_k = \pm \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(\partial_k R_k) \bar{\Gamma}^{(1,1)-1} \right] = \frac{1}{2} \text{STr} \left[(\partial_k R_k) \bar{\Gamma}^{(1,1)-1} \right], \quad (\text{A.17})$$

ahol a STr („Super trace”) jelölést vezettük be arra, hogy fermionikus és bozonikus

szabadsági fokok esetén a korrekt előjellel vegyük a Tr -t. Az (A.16) egyenletet a fluktuáció mátrixszal felírva az (A.18) Wetterich-egyenletet kapjuk:

$$\partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{STr} \left[(\partial_k R_k) \left(\Gamma_k^{(1,1)} + R_k \right)^{-1} \right] \quad (\text{A.18})$$

Az egyenletet gyakran használják a propagátorral kifejezett alakjában is, melyet az (A.18) kifejezésbe helyettesítve az (A.13) operátor azonosságot könnyen megkaphatunk:

$$\partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{STr} [(\partial_k R_k) G_k] \quad (\text{A.19})$$

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőimnek dr. Barnaföldi Gergely Gábornak és Dr. Jakovác Antalnak odaadó és kitartó munkájukat és segítségüket doktori dolgozatom elkészítésében. Köszönetet szeretnék mondani a Dr. Lévai Péternek a Wigner Fizikai Kutatóközpont igazgatójának, aki támogatta, és lehetővé tette munkámat az intézetben. Szeretném megköszönni Frei Zsoltnak az Eötvös Loránd Tudományegyetem Atomfizikai Tanszék vezetőjének, hogy támogatta munkámat és együttműködésemet a Wigner Fizikai Kutatóközponttal.

Köszönettel tartozom a Wigner Fizikai Kutatóközpont Elméleti osztályán dolgozó kollégáimnak a szakmai kérdésekben nyújtott segítségükért és az együtt folytatott konzultációkért. Köszönöm Patkós András tanár úrnak értékes iránymutatását. Köszönöm Szép Zsolt, Kovács Péter és Wolf György közeli munkatársaim szakmai segítségét. Köszönöm a Wigner Fizikai Kutatóközpont titkárságán dolgozók munkáját a kutatásaimmal kapcsolatos hivatali ügyek intézésében. Doktori dolgozatom nem készülhetett volna el a Wigner GPU Laboratórium által nyújtott támogatás nélkül.

Mindez nem jöhetett volna létre családom folyamatos és odaadó támogatása nélkül. Köszönöm feleségemnek, Eszternek, hogy kitartóan ösztönözte munkámat. Köszönöm szüleimnek, hogy támogatták a fizika iránti érdeklődésemet, és ezzel elindítottak a tudomány felé vezető úton, és hogy tanulmányaim során végig mögöttem álltak. Köszönöm Mária nagymamám folyamatos és kitartó támogatását.

Munkámat támogatta a K104292, K104260, NK106119, K120660, K123815 és a TET12 CN-1-2012-0016 számú OTKA pályázati program és az NKM-81/2016 MTA-U számú bilaterális mobilitási program. További támogatást kaptam a NewCompStar MP1304, PHAROS CA16214 és THOR CA15213 nemzetközi COST pályázatokon.

Publikációk

- [1] P. Pósfay, G. G. Barnaföldi és A. Jakovác. “FRG Approach to Nuclear Matter in Extreme Conditions”. *PoS EPS-HEP2015* (2015), 369. old. DOI: 10.22323/1.234.0369.
- [2] G. G. Barnaföldi, A. Jakovac és P. Posfay. “Harmonic expansion of the effective potential in a functional renormalization group at finite chemical potential”. *Phys. Rev. D* 95.2 (2017), 25004. old. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.025004.
- [3] P. Pósfay, G. G. Barnaföldi és A. Jakovác. “Effect of quantum fluctuations in the high-energy cold nuclear equation of state and in compact star observables”. *Phys. Rev. C* 97.2 (2018), 25803. old. DOI: 10.1103/PhysRevC.97.025803.
- [4] G. G. Barnaföldi, A. Jakovác és P. Pósfay. “An Application of Functional Renormalization Group Method for Superdense Nuclear Matter”. *J. Phys. Conf. Ser.* 779.1 (2017), 12048. old. DOI: 10.1088/1742-6596/779/1/012048.
- [5] P. Pósfay, G. G. Barnaföldi és A. Jakovác. “The effect of quantum fluctuations in compact star observables”. *Publ. Astron. Soc. Austral.* 35 (2018), 19. old. DOI: 10.1017/pasa.2018.14.
- [6] P. Pósfay, G. G. Barnaföldi és A. Jakovác. “Estimating the variation of neutron star observables by symmetric dense nuclear matter properties”. *Universe* 5.6 (2019), 153. old. DOI: 10.3390/universe5060153.

Hivatkozások

- [7] Frei Zsolt és Patkós András. *Infláció kozmológia*. Typotex, 2005. ISBN: 978-9-639-54847-3.
- [8] E. W. Kolb és M. S. Turner. “The Early Universe”. *Front. Phys.* 69 (1990), 1–547. old.
- [9] G. Baym. “Ultrarelativistic heavy ion collisions: the first billion seconds”. *Nucl. Phys.* A956 (2016), 1–10. old. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2016.03.007.
- [10] B. J. T. Jones. *Precision Cosmology: The First Half Million Years*. Cambridge University Press, 2017. DOI: 10.1017/CB09781139027809.
- [11] Y. Akrami és mtsai. “Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck”. (2018).
- [12] N. K. Glendenning. *Compact stars: Nuclear physics, particle physics, and general relativity*. 1997.
- [13] P. Haensel, A. Y. Potekhin és D. G. Yakovlev. “Neutron stars 1: Equation of state and structure”. *Astrophys. Space Sci. Libr.* 326 (2007), pp.1–619. DOI: 10.1007/978-0-387-47301-7.
- [14] G. Endrődi és mtsai. “Applying constrained simulations for low temperature lattice QCD at finite baryon chemical potential”. *Phys. Rev. D* 98 (7 2018), 74508. old. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.074508.
- [15] J. Guenther és mtsai. “The QCD equation of state at finite density from analytical continuation”. *Nuclear Physics A* 967 (2017). The 26th International Conference on Ultra-relativistic Nucleus-Nucleus Collisions: Quark Matter 2017, 720–723. old. ISSN: 0375-9474. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2017.05.044>.
- [16] J. Guenther és mtsai. “The QCD equation of state at finite density from analytical continuation”. *EPJ Web Conf.* 137 (2017), 7008. old. DOI: 10.1051/epjconf/201713707008.
- [17] J. W. Holt, M. Rho és W. Weise. “Chiral symmetry and effective field theories for hadronic, nuclear and stellar matter”. *Phys. Rept.* 621 (2016), 2–75. old. DOI: 10.1016/j.physrep.2015.10.011.

- [18] T. Kojo. “QCD in stars”. *10th International Workshop on Critical Point and Onset of Deconfinement (CPOD 2016) Wrocław, Poland, May 30-June 4, 2016*. 2017.
- [19] NASA. *Nicer*. 2017. júl. 7. URL: <https://www.nasa.gov/nicer>.
- [20] F. Özel és P. Freire. “Masses, Radii, and the Equation of State of Neutron Stars”. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 54 (2016), 401–440. old. DOI: 10.1146/annurev-astro-081915-023322.
- [21] Athena Collaboration. *The Athena X-ray Observatory*. 2019. URL: <https://www.the-athena-x-ray-observatory.eu/>.
- [22] A. Merloni és mtsai. “eROSITA Science Book: Mapping the Structure of the Energetic Universe”. (2012).
- [23] A. L. Watts. “Constraining the neutron star equation of state using Pulse Profile Modeling”. *Xiamen-CUSTIPEN Workshop on the EOS of Dense Neutron-Rich Matter in the Era of Gravitational Wave Astronomy Xiamen, China, January 3-7, 2019*. 2019.
- [24] B. P. Abbott és mtsai. “GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral”. *Phys. Rev. Lett.* 119 (16 2017), 161101. old. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.161101.
- [25] B. P. Abbott és mtsai. “GW170817: Measurements of Neutron Star Radii and Equation of State”. *Phys. Rev. Lett.* 121 (16 2018), 161101. old. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.161101.
- [26] F. Özel és mtsai. “The Dense Matter Equation of State from Neutron Star Radius and Mass Measurements”. *Astrophys. J.* 820.1 (2016), 28. old. DOI: 10.3847/0004-637X/820/1/28.
- [27] C. A. Raithel, F. Özel és D. Psaltis. “From Neutron Star Observables to the Equation of State. II. Bayesian Inference of Equation of State Pressures”. *Astrophys. J.* 844.2 (2017), 156. old. DOI: 10.3847/1538-4357/aa7a5a.
- [28] N. Chamel és P. Haensel. “Physics of Neutron Star Crusts”. *Living Reviews in Relativity* 11.1 (2008), 10. old. ISSN: 1433-8351. DOI: 10.12942/lrr-2008-10.
- [29] M. Bauer. “An ab-initio shell-model formula”. *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 17.5 (1976), 442 –449. old. ISSN: 0092-640X. DOI: [https://doi.org/10.1016/0092-640X\(76\)90034-6](https://doi.org/10.1016/0092-640X(76)90034-6).
- [30] H. Groote, E. Hilf és K. Takahashi. “A new semiempirical shell correction to the droplet model: Gross theory of nuclear magics”. *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 17.5 (1976), 418 –427. old. ISSN: 0092-640X. DOI: [https://doi.org/10.1016/0092-640X\(76\)90031-0](https://doi.org/10.1016/0092-640X(76)90031-0).

- [31] J. Jänecke. “Updated mass predictions from the Garvey-Kelson mass relations”. *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 17.5 (1976), 455 –462. old. ISSN: 0092-640X. DOI: [https://doi.org/10.1016/0092-640X\(76\)90036-X](https://doi.org/10.1016/0092-640X(76)90036-X).
- [32] W. Myers és W. Swiatecki. “Nuclear properties according to the Thomas-Fermi model”. *Nuclear Physics A* 601.2 (1996), 141 –167. old. ISSN: 0375-9474. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(95\)00509-9](https://doi.org/10.1016/0375-9474(95)00509-9).
- [33] W. D. Myers. “Development of the semiempirical droplet model”. *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 17.5 (1976), 411 –417. old. ISSN: 0092-640X. DOI: [https://doi.org/10.1016/0092-640X\(76\)90030-9](https://doi.org/10.1016/0092-640X(76)90030-9).
- [34] P. Seeger és W. Howard. “A semiempirical liquid-drop plus shell-correction formula”. *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 17.5 (1976), 428 –430. old. ISSN: 0092-640X. DOI: [https://doi.org/10.1016/0092-640X\(76\)90032-2](https://doi.org/10.1016/0092-640X(76)90032-2).
- [35] J. Blaizot. “Nuclear compressibilities”. *Physics Reports* 64.4 (1980), 171 –248. old. ISSN: 0370-1573. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(80\)90001-0](https://doi.org/10.1016/0370-1573(80)90001-0).
- [36] D. Vretenar, T. Niksic és P. Ring. “A Microscopic estimate of the nuclear matter compressibility and symmetry energy in relativistic mean field models”. *Phys. Rev. C* 68 (2003), 24310. old. DOI: 10.1103/PhysRevC.68.024310.
- [37] J. M. Cavedon és mtsai. “Measurement of charge-density differences in the interior of Pb isotopes”. *Phys. Rev. Lett.* 58 (3 1987), 195–198. old. DOI: 10.1103/PhysRevLett.58.195.
- [38] W. D. Myers és W. J. Swiatecki. “Nuclear equation of state”. *Phys. Rev. C* 57 (6 1998), 3020–3025. old. DOI: 10.1103/PhysRevC.57.3020.
- [39] B. G. Todd-Rutel és J. Piekarewicz. “Neutron-Rich Nuclei and Neutron Stars: A New Accurately Calibrated Interaction for the Study of Neutron-Rich Matter”. *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005), 122501. old. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.122501.
- [40] D. H. Youngblood, H. L. Clark és Y. W. Lui. “Incompressibility of Nuclear Matter from the Giant Monopole Resonance”. *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999), 691–694. old. DOI: 10.1103/PhysRevLett.82.691.
- [41] M. Baldo és G. Burgio. “The nuclear symmetry energy”. *Progress in Particle and Nuclear Physics* 91 (2016), 203 –258. old. ISSN: 0146-6410. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2016.06.006>.
- [42] A. Klimkiewicz és mtsai. “Nuclear symmetry energy and neutron skins derived from pygmy dipole resonances”. *Phys. Rev. C* 76 (5 2007), 51603. old. DOI: 10.1103/PhysRevC.76.051603.
- [43] J. Meng. *Relativistic Density Functional for Nuclear Structure*. International Review of Nuclear Physics. World Scientific Publishing Company, 2016. ISBN: 9789814733274.

- [44] T. Marketin, D. Vretenar és P. Ring. “Calculation of β -decay rates in a relativistic model with momentum-dependent self-energies”. *Phys. Rev. C* 75 (2 2007), 24304. old. DOI: 10.1103/PhysRevC.75.024304.
- [45] C. H. Johnson, D. J. Horen és C. Mahaux. “Unified description of the neutron $-^{208}\text{Pb}$ mean field between -20 and +165 MeV from the dispersion relation constraint”. *Phys. Rev. C* 36 (6 1987), 2252–2273. old. DOI: 10.1103/PhysRevC.36.2252.
- [46] K. A. Maslov, E. E. Kolomeitsev és D. N. Voskresensky. “Relativistic Mean-Field Models with Scaled Hadron Masses and Couplings: Hyperons and Maximum Neutron Star Mass”. *Nucl. Phys.* A950 (2016), 64–109. old. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2016.03.011.
- [47] P.-G. Reinhard. “Skyrme forces and giant resonances in exotic nuclei”. *Nuclear Physics A* 649.1 (1999). Giant Resonances, 305–314. old. ISSN: 0375-9474. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9474\(99\)00076-7](https://doi.org/10.1016/S0375-9474(99)00076-7).
- [48] C. H. Johnson, D. J. Horen és C. Mahaux. “Unified description of the neutron 208 Pb mean field between -20 and +165 MeV from the dispersion relation constraint”. *Phys. Rev. C* 36 (6 1987), 2252–2273. old. DOI: 10.1103/PhysRevC.36.2252.
- [49] C. Mahaux és R. Sartor. “Properties of the quasiparticle excitations in 207 Pb and 209 Pb from an extrapolation of the optical-model potential”. *Nucl. Phys.* A475 (1987), 247–275. old. DOI: 10.1016/0375-9474(87)90165-5.
- [50] A. Schmitt. “Dense matter in compact stars: A pedagogical introduction”. *Lect. Notes Phys.* 811 (2010), 1–111. old. DOI: 10.1007/978-3-642-12866-0.
- [51] R. M. Wald. *General Relativity*. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr., 1984. DOI: 10.7208/chicago/9780226870373.001.0001.
- [52] Wikimedia. *Spherical polar coordinates*. 2010. jún. 5. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical_polar_coordinates.PNG.
- [53] M. Prakash, J. R. Cooke és J. M. Lattimer. “Quark - hadron phase transition in protoneutron stars”. *Phys. Rev.* D52 (1995), 661–665. old. DOI: 10.1103/PhysRevD.52.661.
- [54] R. B. Wiringa, V. Fiks és A. Fabrocini. “Equation of state for dense nucleon matter”. *Phys. Rev.* C38 (1988), 1010–1037. old. DOI: 10.1103/PhysRevC.38.1010.
- [55] A. Akmal, V. R. Pandharipande és D. G. Ravenhall. “Equation of state of nucleon matter and neutron star structure”. *Phys. Rev. C* 58 (3 1998), 1804–1828. old. DOI: 10.1103/PhysRevC.58.1804.

- [56] H. T. Cromartie és mtsai. “Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar”. *Nature Astronomy* (2019). ISSN: 2397-3366. DOI: 10.1038/s41550-019-0880-2.
- [57] S. Guillot és R. E. Rutledge. “Rejecting proposed dense-matter equations of state with quiescent low-mass X-ray binaries”. *Astrophys. J.* 796.1 (2014), L3. old. DOI: 10.1088/2041-8205/796/1/L3.
- [58] J. M. Lattimer. “Introduction to neutron stars”. *AIP Conference Proceedings* 1645.1 (2015), 61–78. old. DOI: 10.1063/1.4909560.
- [59] N. K. Glendenning. “Limiting rotational period of neutron stars”. *Phys. Rev. D* 46 (10 1992), 4161–4168. old. DOI: 10.1103/PhysRevD.46.4161.
- [60] J. W. T. Hessels és mtsai. “A Radio Pulsar Spinning at 716 Hz”. *Science* 311.5769 (2006), 1901–1904. old. ISSN: 0036-8075. DOI: 10.1126/science.1123430.
- [61] C. Wetterich. “Exact evolution equation for the effective potential”. *Physics Letters B* 301.1 (1993), 90 –94. old. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(93\)90726-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)90726-X).
- [62] C. Itzykson és J.-M. Drouffe. *Statistical Field Theory*. 1. köt. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1989. DOI: 10.1017/CB09780511622779.
- [63] J. Zinn-Justin. *Quantum field theory and critical phenomena / J. Zinn-Justin*. English. 2nd ed. Clarendon Press ; Oxford University Press Oxford : New York, 1993, xxiv., 996 p. : ISBN: 0198520530.
- [64] J. Polonyi. “Lectures on the functional renormalization group method”. *Central European Journal of Physics* 1.1 (2003), 1–71. old. ISSN: 1644-3608. DOI: 10.2478/BF02475552.
- [65] F. J. Wegner és A. Houghton. “Renormalization group equation for critical phenomena”. *Phys. Rev.* A8 (1973), 401–412. old. DOI: 10.1103/PhysRevA.8.401.
- [66] D. F. Litim. “Optimized renormalization group flows”. *Phys. Rev.* D64 (2001), 105007. old. DOI: 10.1103/PhysRevD.64.105007.
- [67] M. L. Bellac. *Thermal Field Theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2011. ISBN: 9780511885068, 9780521654777. DOI: 10.1017/CB09780511721700.
- [68] A. Jakovác és A. Patkós. “Resummation and Renormalization in Effective Theories of Particle Physics”. *Lect. Notes Phys.* 912 (2016), pp.1–223. DOI: 10.1007/978-3-319-22620-0.

- [69] T. K. Herbst, J. M. Pawłowski és B.-J. Schaefer. “Phase structure and thermodynamics of QCD”. *Phys. Rev.* D88.1 (2013), 14007. old. DOI: 10.1103/PhysRevD.88.014007.
- [70] M. Drews és mtsai. “Thermodynamic phases and mesonic fluctuations in a chiral nucleon-meson model”. *Phys. Rev.* D88.9 (2013), 96011. old. DOI: 10.1103/PhysRevD.88.096011.
- [71] M. Drews és W. Weise. “Functional renormalization group approach to neutron matter”. *Phys. Lett.* B738 (2014), 187–190. old. DOI: 10.1016/j.physletb.2014.09.051.
- [72] M. Drews és W. Weise. “From asymmetric nuclear matter to neutron stars: a functional renormalization group study”. *Phys. Rev.* C91.3 (2015), 35802. old. DOI: 10.1103/PhysRevC.91.035802.
- [73] J. Eser, M. Grahel és D. H. Rischke. “Functional Renormalization Group Study of the Chiral Phase Transition Including Vector and Axial-vector Mesons”. *Phys. Rev.* D92.9 (2015), 96008. old. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.096008.
- [74] P. Kovacs és Z. Szepl. “The critical surface of the $SU(3)_L \times SU(3)_R$ chiral quark model at non-zero baryon density”. *Phys. Rev.* D75 (2007), 25015. old. DOI: 10.1103/PhysRevD.75.025015.
- [75] S. Resch, F. Rennecke és B.-J. Schaefer. “Mass sensitivity of the three-flavor chiral phase transition”. *Phys. Rev.* D99.7 (2019), 76005. old. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.076005.
- [76] J. A. Adams és mtsai. “Solving nonperturbative flow equations”. *Mod. Phys. Lett.* A10 (1995), 2367–2380. old. DOI: 10.1142/S0217732395002520.
- [77] K. Fukushima, K. Kamikado és B. Klein. “Second-order and Fluctuation-induced First-order Phase Transitions with Functional Renormalization Group Equations”. *Phys. Rev.* D83 (2011), 116005. old. DOI: 10.1103/PhysRevD.83.116005.
- [78] M. Drews és W. Weise. “Functional renormalization group studies of nuclear and neutron matter”. *Prog. Part. Nucl. Phys.* 93 (2017), 69. old. DOI: 10.1016/j.ppnp.2016.10.002.
- [79] S. Scherer és M. R. Schindler. “A Primer for Chiral Perturbation Theory”. *Lect. Notes Phys.* 830 (2012), pp.1–338. DOI: 10.1007/978-3-642-19254-8.
- [80] F. J. Yndurain, R. Garcia-Martin és J. R. Pelaez. “Experimental status of the $\pi\pi$ isoscalar S wave at low energy: $f(0)(600)$ pole and scattering length”. *Phys. Rev.* D76 (2007), 74034. old. DOI: 10.1103/PhysRevD.76.074034.
- [81] A. Jakovac és mtsai. “T - μ phase diagram of the chiral quark model from a large flavor number expansion”. *Phys. Lett.* B582 (2004), 179–186. old. DOI: 10.1016/j.physletb.2004.01.008.

- [82] T. Hinderer és mtsai. “Tidal deformability of neutron stars with realistic equations of state and their gravitational wave signatures in binary inspiral”. *Phys. Rev. D* 81 (2010), 123016. old. DOI: 10.1103/PhysRevD.81.123016.
- [83] F. Ozel és mtsai. “Measuring Neutron Star Radii via Pulse Profile Modeling with NICER”. *Astrophys. J.* 832.1 (2016), 92. old. DOI: 10.3847/0004-637X/832/1/92.
- [84] L. Rezzolla és K. Takami. “Gravitational-wave signal from binary neutron stars: a systematic analysis of the spectral properties”. *Phys. Rev. D* 93.12 (2016), 124051. old. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.124051.
- [85] J. D. Walecka. “A Theory of highly condensed matter”. *Annals Phys.* 83 (1974), 491–529. old. DOI: 10.1016/0003-4916(74)90208-5.
- [86] M. H. Johnson és E. Teller. “Classical Field Theory of Nuclear Forces”. *Phys. Rev.* 98 (1955), 783–787. old. DOI: 10.1103/PhysRev.98.783.
- [87] M. Tanabashi és mtsai. “Review of Particle Physics”. *Phys. Rev. D* 98 (3 2018), 30001. old. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.030001.
- [88] G. Baym, C. Pethick és P. Sutherland. “The Ground state of matter at high densities: Equation of state and stellar models”. *Astrophys. J.* 170 (1971), 299–317. old. DOI: 10.1086/151216.
- [89] L. R. Weih, E. R. Most és L. Rezzolla. “Optimal neutron-star mass ranges to constrain the equation of state of nuclear matter with electromagnetic and gravitational-wave observations”. *Astrophys. J.* 881 (2019), 73. old. DOI: 10.3847/1538-4357/ab2edd, 10.3847/1538-4357.
- [90] Z. Li és mtsai. “Neutron stars within a relativistic mean field theory compatible with nucleon-nucleon short-range correlations”. *Nuclear Physics A* 990 (2019), 118–136. old. ISSN: 0375-9474. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2019.07.002>.
- [91] J. Takátsy és mtsai. “Compact Star Properties from an Extended Linear Sigma Model”. *Universe* 5.7 (2019). ISSN: 2218-1997. DOI: 10.3390/universe5070174.

Térelméleti módszerek az asztrofizikában

Doktori értekezés

Pósfay Péter

Összefoglalás

A szupernóva-robbanás során keletkező kompakt csillagok, mint például a neutroncsillagok kiemelkedően fontos szerepet játszanak a modern asztrofizikai megfigyelésekben. Jelentős szerepük van a csillagok működésének és az elemek keletkezésének megértésében. A többszörös („multimessenger”) asztrofizika – mint új tudományterület – keretein belül is központi szerepet játszanak a neutroncsillagok, mert több egymástól független megfigyelési módszerrel is vizsgálhatóak. Az általuk kibocsátott jelek a röntgen és gamma tartományban is érzékelhetők, és a bespiráló neutroncsillag kettősök a legfontosabb gravitációshullám-források közé tartoznak.

A megfigyelések kiértékelése során szükség van a neutroncsillagok hideg maganyagát leíró állapotegyenletre. A neutroncsillagok szerkezetének modellezése során nagy kihívást jelent az „álarc probléma”, azaz, hogy az egymástól különböző nukleáris modellek állapotegyenletei gyakran vezetnek hasonló megfigyelhető makroszkópikus paraméterekkel rendelkező neutroncsillagokhoz. Munkám során az álarc problémával foglalkoztam az effektív maganyagmodellek szempontjából.

Vizsgálataimat két fő irányvonal mentén végeztem. A dolgozat első részében a funkcionális renormálási csoport (FRG) módszert alkalmaztam, mely segítségével megmutattam, hogy az álarc probléma fennáll akkor is, ha csak egy modellt vizsgálunk. Ennek oka, hogy különböző közelítéseket használhatunk a téregyenletek megoldására. A kvantumfluktuációk különböző rendű figyelembe vétele más-más eredményre vezet ugyanazon modellen belül, amik a különböző fizikai mennyiségek esetén más-más mértékű korrekciókat okoznak.

Ennek vizsgálatára kidolgoztam egy módszert a fermionikus FRG egyenletek megoldására a neutroncsillagok hideg maganyagát jellemző véges kémiai potenciálon és zéró hőmérsékleten. A módszert alkalmaztam egy demonstratív Yukawa-modell esetére, és összehasonlítottam a kvantum fluktuációk hatását átlagtér, egyhurok és magas rendű FRG közelítésben a modell magfizikai tulajdonságaira és a belőle származtatott neutroncsillagokra nézve. Megállapítottam, hogy a maganyag mikroszkópikus tulajdonságaira nézve jelentős hatással vannak a radiatív korrekciók: a fázisdiagramon 20–30 %-os eltérést, az állapotegyenlet esetében pedig 10–20 %-os eltérést okozhatnak. Ennek ellenére a neutroncsillagok mérhető tulajdonságaiban ennél sokkal kisebb, mindössze 1–3 %-os eltérést okoznak a kvantumfluktuációk, ami megközelíti a modern asztrofizikai mérések felbontóképességét. Megállapítottam továbbá, hogy a különböző rendű közelítések különböző fizikai mennyiségek kiszámítása esetén más nagyságrendű korrekciókat okoznak: az egyhurok közelítés, nem mindig pontosabb, mint az átlagtér.

A Dolgozatom második felében az álarc problémát fenomenológia oldalról vizsgáltam, skalárkölsönhatásokkal kiegészített σ - ω modellben. Megmutattam, hogy a maganyag mikroszkópikus paraméterei milyen mértékben befolyásolják a modellből származtatott neutroncsillagok megfigyelhető paramétereit. Megállapítottam, hogy a neutroncsillagok tömege, sugara, kompaktsága paraméterei az effektív nukleon tömeg értékre a legérzékenyebbek. Mindemellett a maganyag kompressziómodulusának és szimmetria energiájának a maximális csillagtömegre gyakorolt hatása egy, illetve két nagyságrenddel kisebb, mint az effektív nukleon tömegé. A kompressziómodulus és a szimmetriaenergia hatása legjobban a neutroncsillagok maximális sugarának értékében nyilvánul meg. Azt találtam, hogy a β -egyensúly figyelembe vételének hatása jelentősebb a neutroncsillagok maximális sugarára nézve, mint a maximális csillagtömegre. A σ - ω modell konkrét példáján keresztül szemléltettem, hogy hogyan alakulhat ki az álarc probléma effektív modellek esetén a paraméterek együttes hatása miatt.

Kutatásom központi eredménye, hogy a neutroncsillagok különböző megfigyelhető tulajdonságai a vizsgált modellekben más és más mikroszkópikus paraméterekre érzékenyek. Vizsgálataim közvetlen következménye, hogy az álarc probléma vizsgálatában és feloldásában kiemelkedő szerepe lesz a modern méréseknek, melyek nem csak a neutroncsillagok tömegét hanem sugarát is nagyobb precíziással képesek megmérni.

Field-Theory Methods in Astrophysics

PhD Thesis

Péter Pósfay

Summary

Compact stars like neutron stars play an important role in modern astrophysical observations. They play a central role in the understanding of the evolution of stars and the synthesis of the natural elements. Neutron stars also play a central role in the recently developed field of multimessenger astrophysics because they can be studied using many independent observational methods. They emit X-ray and gamma signals and neutron star mergers are amongst the most promising gravity wave sources.

The equation of state of the cold dense nuclear matter of neutron stars plays an important role in the interpretation of the observational data. The so called masquerade problem poses a challenge in the process of modelling neutron star interiors and equation of state: different nuclear models yield very similar neutron star observables. This makes model selection and rejection more challenging. In my thesis I studied the masquerade problem in effective nuclear matter models.

I approached the topic from two main directions. In the first part of the dissertation I used the Functional Renormalization Group (FRG) method to show that the masquerade problem appears even if only one model is studied. Taking into account different approximations for the solutions of the field equations which yield different results for the same model. I followed the effect of quantum fluctuations in different approximations and showed that they lead to different corrections in different physical quantities.

I proposed a method to solve fermionic FRG equations at zero absolute temperature and finite chemical potential. I applied this method to solve a demonstrative Yukawa-model and I calculated the effect of quantum fluctuations on the properties of nuclear matter and the on the corresponding neutron star observables. I calculated the results in mean field, one loop and in high order FRG approximation. The different approximations caused 20 – 30 % difference in the phase diagram of the model and 10 – 20 % difference in the equation of state. Despite of this the difference between the approximations regarding neutron star properties stayed in the smaller 1 – 3 % region. However, I showed that even this small deviation in neutron star parameters is close to the detection threshold in modern astronomical measurements. I also found that different approximations does not keep their hierarchical relations to each other for every physical quantity. For example the mean field approximation is closer to the high order FRG calculation in some cases than the one loop approximation despite the fact that it does not contain quantum mechanical corrections.

In the second part of the I studied the masquerade problem in a phenomenological model. I used an extended version of the $\sigma - \omega$ model to study how the microscopic parameters of the nuclear matter influence the observable parameters of neutron stars. I concluded that observable parameters of neutron stars are the most sensitive to the value of the nucleon effective mass. The value of the compression modulus and symmetry energy influence the maximum mass of neutron stars by one and two magnitudes smaller respectively, than nucleon effective mass. The effect of compression modulus and symmetry energy is more prominent in value of maximum possible radius of neutron stars. I found that including the β -equilibrium in the equation of state influences radius of neutron stars more than their mass. I demonstrated using the example $\sigma - \omega$ model how the masquerade problem arises due to the combined effect of the microscopic parameters of nuclear matter.

My central result is, that different observable parameters of neutron stars are sensitive to different microscopic nuclear parameters. These demonstrate that measuring not only the mass but the radius of neutron stars will be very important in the model selection of nuclear models and in the treatment of the masquerade problem.

ADATLAP

a doktori értekezés nyilvánosságra hozatalához*

I. A doktori értekezés adatai

A szerző neve: Pósfay Péter

MTMT-azonosító: 10051018

A doktori értekezés címe és alcíme: Térelméleti módszerek az asztrofizikában

DOI-azonosító: 10.15476/ELTE.2019.279

A doktori iskola neve: ELTE Fizika Doktori Iskola

A doktori iskolán belüli doktori program neve: Részecskefizika és csillagászat

A témavezető neve és tudományos fokozata: dr. Barnaföldi Gergely Gábor, PhD

A témavezető munkahelye: Wigner Fizikai Kutatóközpont

A társ témavezető neve és tudományos fokozata: dr. Jakovác Antal, DSc

A társ témavezető munkahelye: ELTE Fizikai Intézet Atomfizikai tanszék

II. Nyilatkozatok

1. A doktori értekezés szerzőjeként

a) hozzájárulok, hogy a doktori fokozat megszerzését követően a doktori értekezésem és a tézisek nyilvánosságra kerüljenek az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban. Felhatalmazom a Természettudományi kar Dékáni Hivatal Doktori, Habilitációs és Nemzetközi Ügyek Csoportjának ügyintézőjét, hogy az értekezést és a téziseket feltöltse az ELTE Digitális Intézményi Tudástárba, és ennek során kitöltse a feltöltéshez szükséges nyilatkozatokat.

b) kérem, hogy a mellékelt kérelemben részletezett szabadalmi, illetőleg oltalmi bejelentés közzétételéig a doktori értekezést ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban;

c) kérem, hogy a nemzetbiztonsági okból minősített adatot tartalmazó doktori értekezést a minősítés (dátum)-ig tartó időtartama alatt ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban;

d) kérem, hogy a mű kiadására vonatkozó mellékelt kiadó szerződésre tekintettel a doktori értekezést a könyv megjelenéséig ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban, és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban csak a könyv bibliográfiai adatait tegyék közzé. Ha a könyv a fokozatszerzést követően egy évig nem jelenik meg, hozzájárulok, hogy a doktori értekezésem és a tézisek nyilvánosságra kerüljenek az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban.

2. A doktori értekezés szerzőjeként kijelentem, hogy

a) az ELTE Digitális Intézményi Tudástárba feltöltendő doktori értekezés és a tézisek saját eredeti, önálló szellemi munkám és legjobb tudomásom szerint nem sértem vele senki szerzői jogait;

b) a doktori értekezés és a tézisek nyomtatott változatai és az elektronikus adathordozón benyújtott tartalmak (szöveg és ábrák) mindenben megegyeznek.

3. A doktori értekezés szerzőjeként hozzájárulok a doktori értekezés és a tézisek szövegének plágiumkereső adatbázisba helyezéséhez és plágiumellenőrző vizsgálatok lefuttatásához.

Kelt: Budapest, 2019. december 9.


.....
a doktori értekezés szerzőjének aláírása